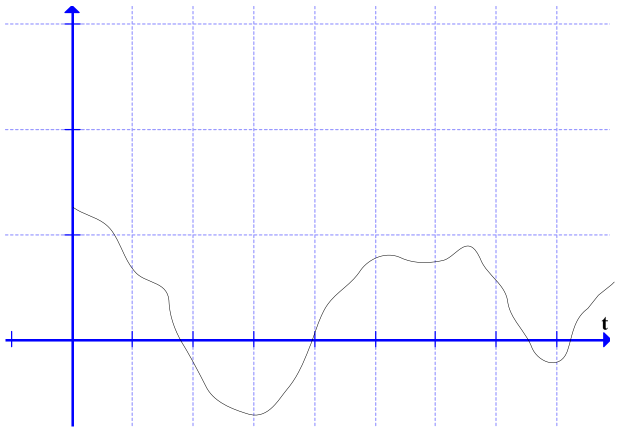
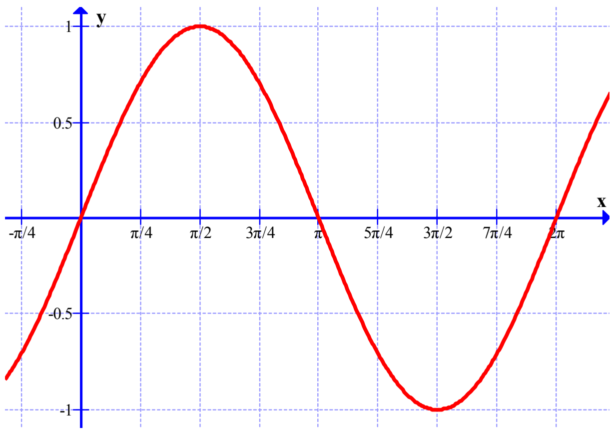
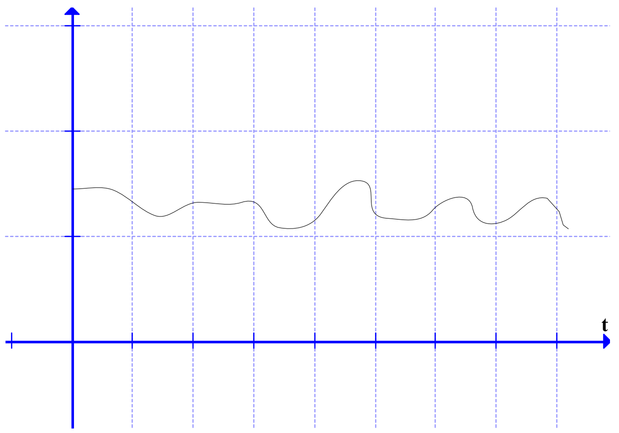
Váltakozó (hibásan váltó-) mennyiségeknek nevezzük azokat a jeleket, melyek időbeli lefolyásuk közben polaritást (előjelet) váltanak, legalább egyszer. A legalább egy nullátmeneti (polaritásváltás) kritériumnak megfelelnek azok a jelek, melyek nem periodikusak, vagyis időbeli lefolyásukban nem lelhető fel ismétlődés (1. ábra), valamint megfelelnek a periodikus jelek is, melyek időbeli lefolyásukat tekintve ismétlődőek (2. ábra), például szinuszos jelalakkal. Fontos megjegyezni, hogy az a jel, amelynek értéke az idő függvényében változik, de közben polaritást nem vált, az nem váltakozó, hanem változó mennyiség. Erre mutat példát a 3. ábra. A 4. ábra egy szinuszosan változó értékű jel időbeli lefolyását mutatja, azonban eme jel nem vált polaritást, így ez a jel is változó jel és nem váltakozó. Amennyiben a 4. ábra egy feszültség-idő függvény, akkor a jelet változó egyenfeszültségnek nevezzük.



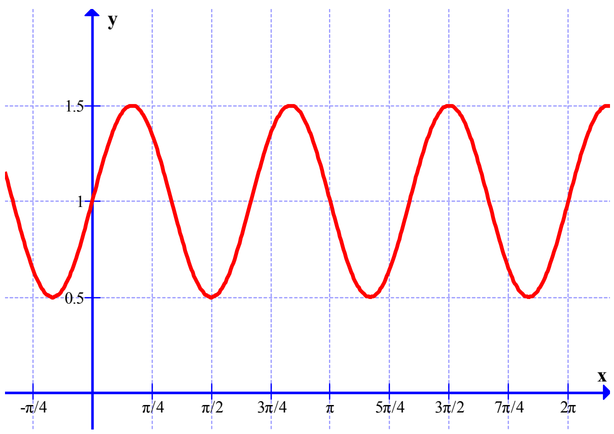
1. ábra nem periodikus váltakozó jel



2. ábra *PERIODIKUS VÁLTAKOZÓ JEL*



3. ábra nem periodikus, változó jel

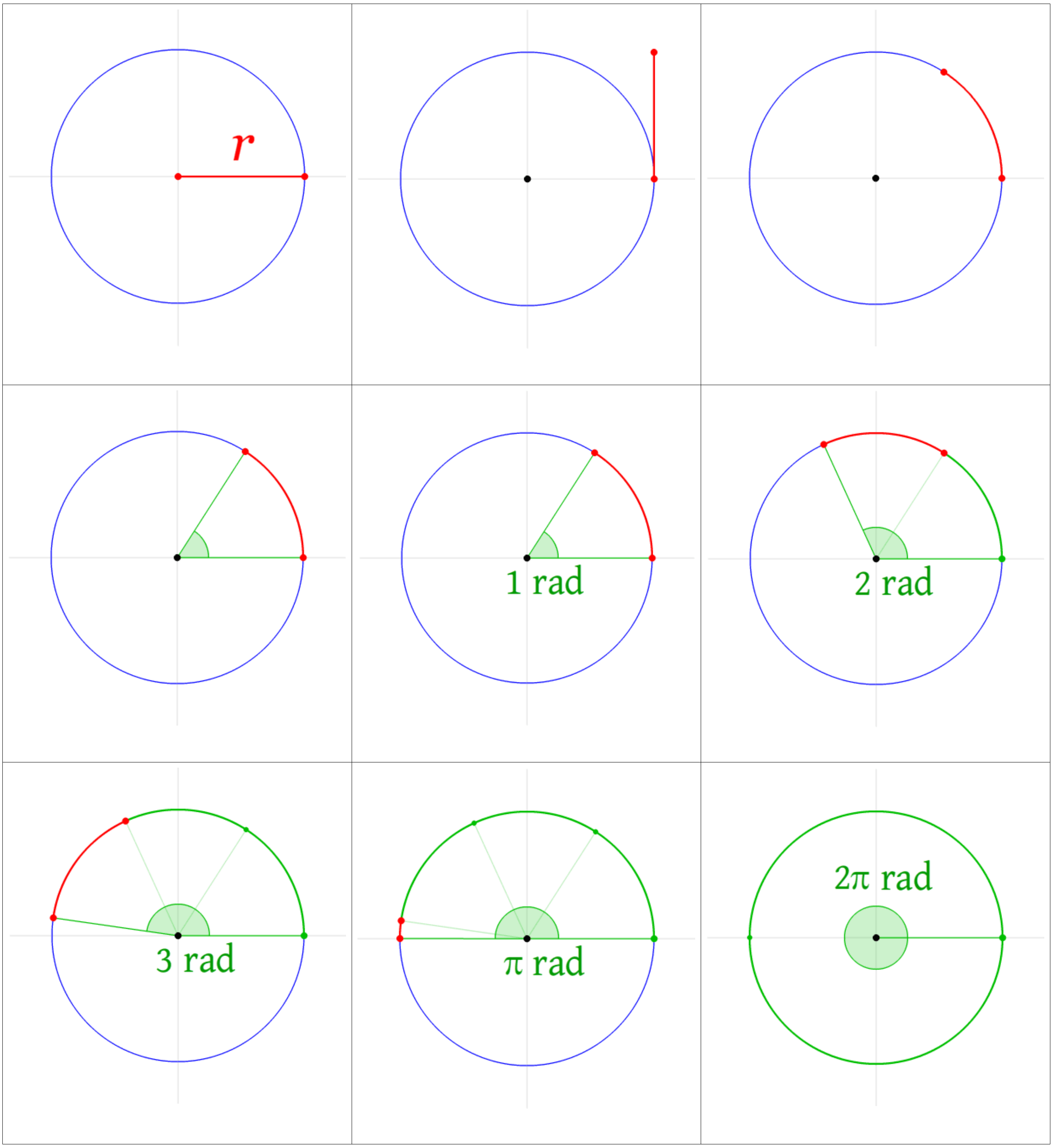


4. ábra periodikusan változó jel

Vizsgálódásunk fókuszában a periodikus (szinusz) váltakozó mennyiségek lesznek. Ennek több oka is van:

- a természetben javarészt periodikus rezgések tapasztalhatók (fény-, hang-, mechanikai-);
- bármely nemszinuszos rezgés előállítható több, különböző amplitúdójú, -,fázisú, -frekvenciájú jelek összegeként (*Fourier-analízis és Fourier-szintézis*);
- az előállított villamosenergia is lényegileg szinuszos lefolyású.

Képzeletben forgassunk meg vízszintes helyzetből, balra egy vektort, melynek nagysága egységnyi. Az 5. ábrán megfigyelhető, hogy a forgó vektor csúcspontja egy körívet ír le a forgása során, miközben a vektor α szöget zár be a vízszintes tengellyel. Amíg a vektor teljesen körbe fordul, az α szög mindennek megfelelően 0 és 360 fok között változik, s a folyamat kezdődik elölről. Az így létrejött körmozgás tehát ismétlődő, vagyis periodikus. Az ismétlődés $\alpha = 360^o + k \cdot 360^o$ formula szerinti, ahol k eleme egész szám.



<u>5. ábra</u> az ívmérték származtatása: $1 rad \Rightarrow r = i$ (piros)

A szögekkel történő számítások kényelmessé tételének érdekében a XIX. században bevezették a radiánt, mint ívmértéket. A radián v. ívmérték a síkszögek egyik „mértékegysége”, amelyet a rad szimbólummal jelölnek. Dimenzió nélküli szám, mivel két hosszúság hányadosa. A matematikusok a szöget általában radiánban mérik, és a radián jelölést gyakran elhagyják. Ha fokot használnak, azt a ° jellel különböztetik meg. Egy radián az a szög, amely alatt a sugárral megegyező nagyságú ívhossz a középpontból látszik. Másképp a radián a sugárnyi hosszúságú ívhosszhoz tartozó középponti szög. Egy kör középponti szögének radiánban mért értéke kiszámolható, ha a hozzá tartozó ívhosszt *(i)* elosztjuk a sugárral *(r)*. A radiánból a fokokba való átszámítás azon az elemi geometriai tételen alapul, miszerint a kör középponti szögei és e szögek ívhossza egyenesen arányosak, jelekkel $\alpha \sim i$. Ha a középponti szög épp a teljesszög, az ívhossz akkor a kerület, így aztán ez esetben $\alpha = 360 = k_{kör} = 2r\pi$, és ekkor, a radián definíciója alapján, $\alpha = \frac{k_{kör}}{r} = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$. Tehát a 360° éppen 2π radiánnak felel meg.[1]

Mindezekből $\quad 1^o = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} rad = 17{,}453 \cdot 10^{-3} \qquad 1 rad = \frac{360}{2\pi} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o = 57{,}296^o$

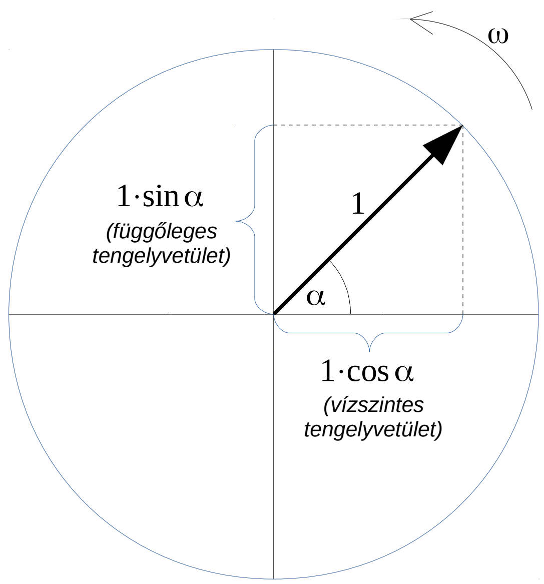
Pl.: Számítsuk ki a 30^o radián értékét! $\qquad 30^o = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$.

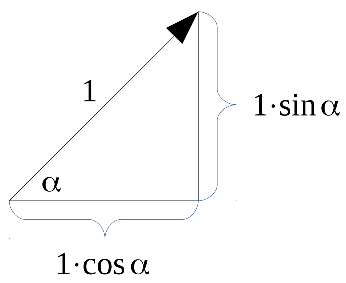
Számítsuk ki a $2\pi rad$ rad értékét fokban! $\qquad 2\pi rad = 2\pi \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{360\pi}{\pi} = 360^o$

Nevezetes szögek radiánban:

$$30^o = \frac{\pi}{6}\ ;\ 45^o = \frac{\pi}{4}\ ;\ 60^o = \frac{\pi}{3}\ ;\ 90^o = \frac{\pi}{2}\ ;\ 180^o = \pi\ ;\ 270^o = \frac{3}{2}\pi\ ;\ 360^o = 2\pi\ .$$

Az ω szögsebességgel (szögsebesség, körfrekvencia: $\omega = 2\pi f$) forgó vektornak két vetülete „keletkezik” (2. ábra), egy függőleges és egy vízszintes. Eme vetületek – értelem szerint – pillanatról pillanatra változnak, a forgás, s vele együtt α szög függvényében. Amennyiben a forgóvektort egy háromszög átfogójának tekintjük, úgy a két vetület lényegében az átfogóhoz tartozó (pillanatnyi) befogóértékek, ezért a Pythagoras-tételt alkalmazhatjuk a számításokhoz.





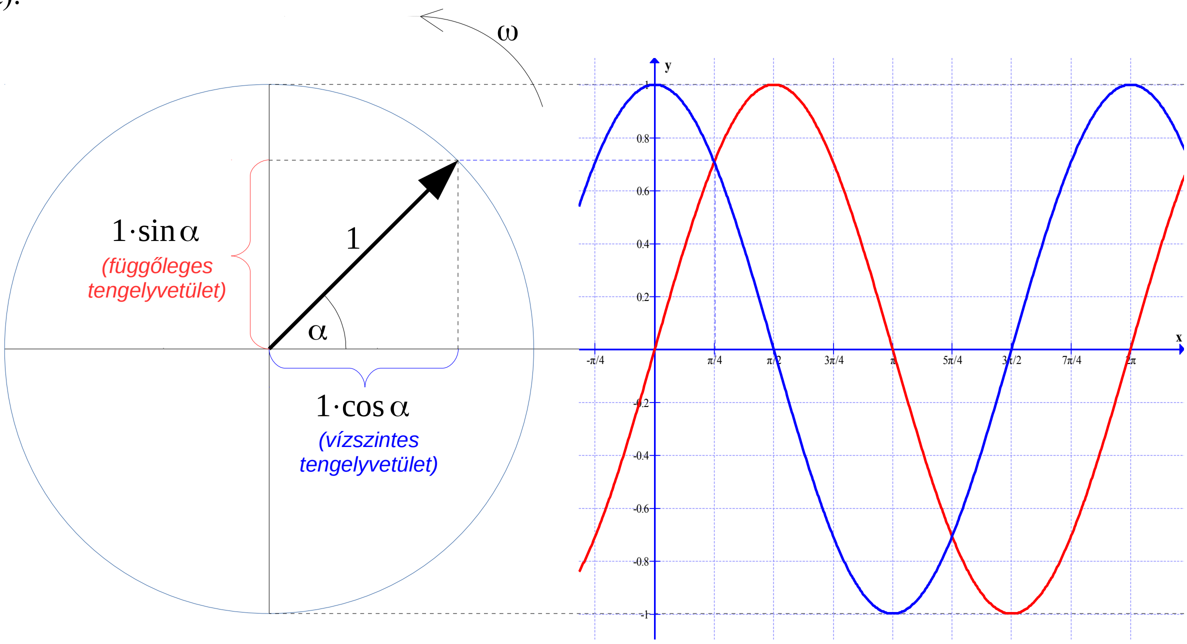
Pythagoras-tétele alapján: $c^2 = a^2 + b^2$

Ekkor: $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

<u>6. ábra</u> a forgóvektor vetületei

1 Wikipédia: Radián, http://hu.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n, megjelenítve 2014. 12. 24.

Amennyiben a forgóvektor pillanatnyi vetületértékeit ábrázoljuk a szögelfordulás függvényében, akkor a két szinuszos jellegű függvényt kapunk. A piros a szinusz-, a kék pedig a koszinusz-függvény (7. ábra).

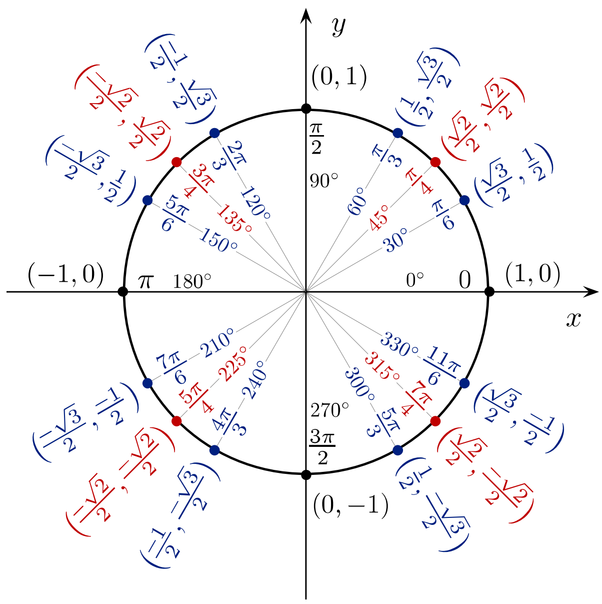


7. ábra a forgóvektor vetületértékei a szögelfordulás függvényében

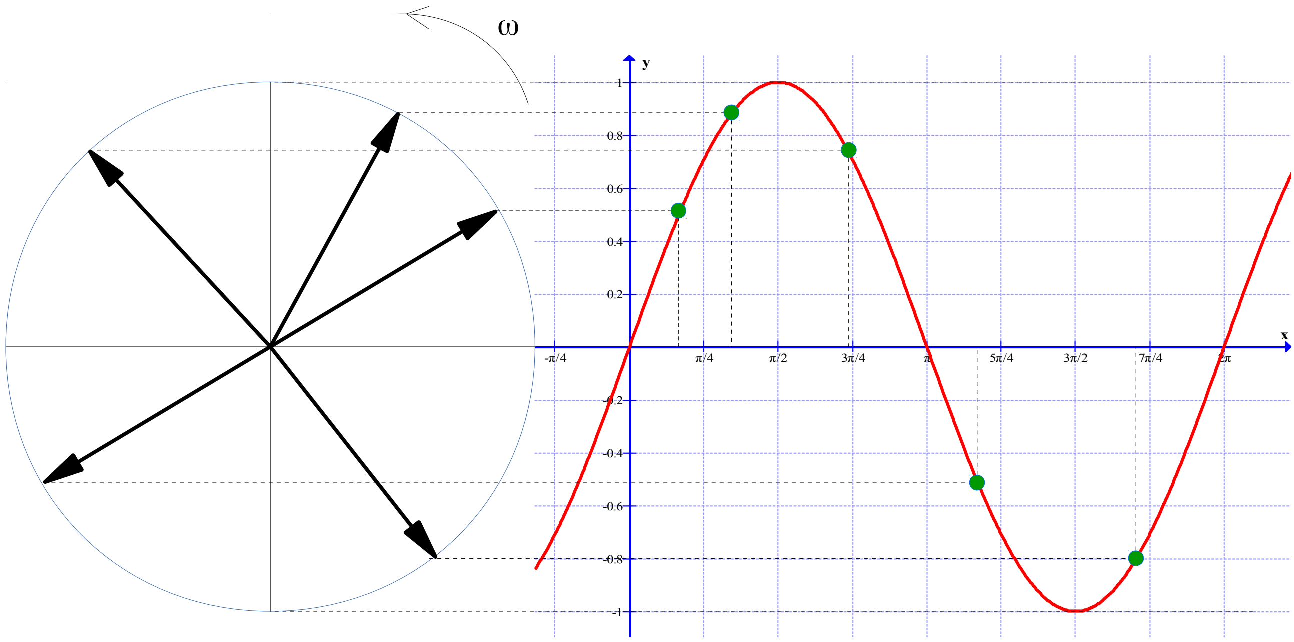
A 7. ábrát megfigyelve a következő megállapításokat tehetjük meg:

- szinuszos lefolyásúak;
- alulról és felülről korlátosak: $y_{min}=-1$ és $y_{max}=1$, egységsugarú kör esetén:
  - értékkészlet: $\sin\alpha=[-1;1]$; $y_{min}=-1 => 270^o - nál$; $y_{max}=1 => 90^o - nál$
  - értékkészlet: $\cos\alpha=[-1;1]$; $y_{min}=-1 => 180^o - nál$; $y_{max}=1 => 0^o - nál$
- a két függvény szigorú, merev kapcsolatban van, az egyes értékeket 90 fokos eltolással veszik fel, hiszen a két vetület is 90 fokot zár be; úgy mondhatjuk, hogy a szinuszfüggvény 90 fokot késik a koszinuszfüggvényhez képest, vagy a koszinuszfüggvény 90 fokot siet a szinuszfüggvényhez képest;
- a szinuszos függvények periodikusak (ismétlődőek):
  - $360^o + k\cdot 360^o$, illetve $2\pi + k\cdot 2\pi$ szerint, ahol k eleme egész szám (pozitív és negatív is).

A 8. ábra szerinti kördiagram tartalmazza a nevezetes szögeket fokban és radiánban, és a hozzájuk tartozó vetületértékeket, egységsugarú kör esetén. Az első vetületérték a koszinuszos, a második pedig a szinuszos. Felismerhető többek között az is, hogy bizonyos szögek esetén (45, 135, 225, 315) megegyezik a két vetületérték.

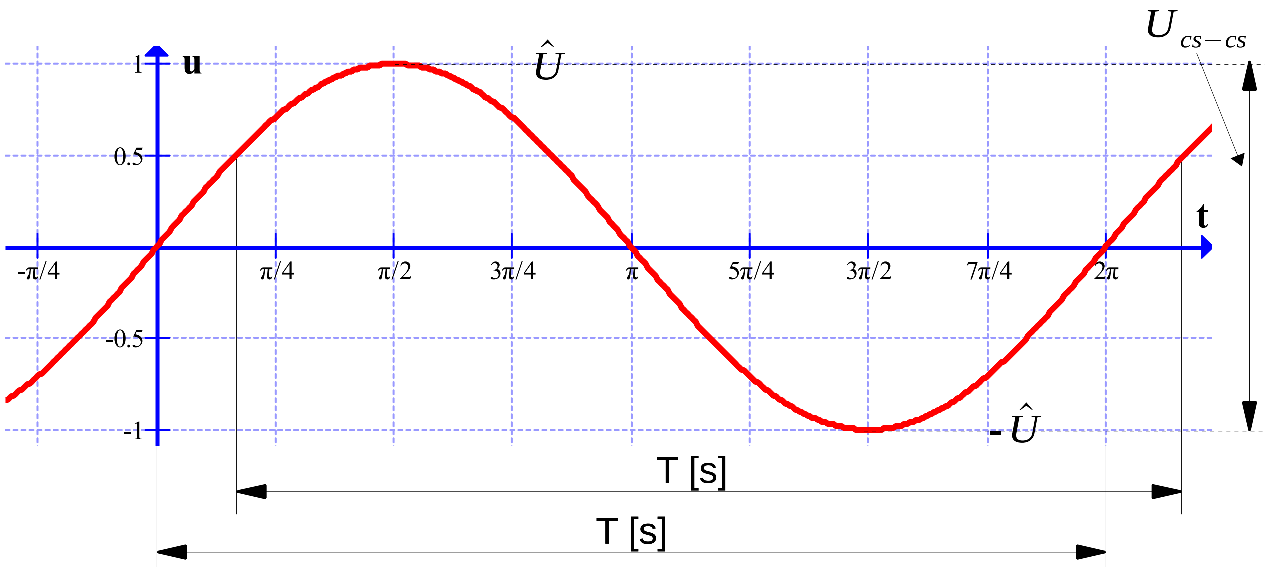


8. ábra az egységsugarú forgóvektor nevezetes szögei (fok, rad) és vetületei (cos, sin)

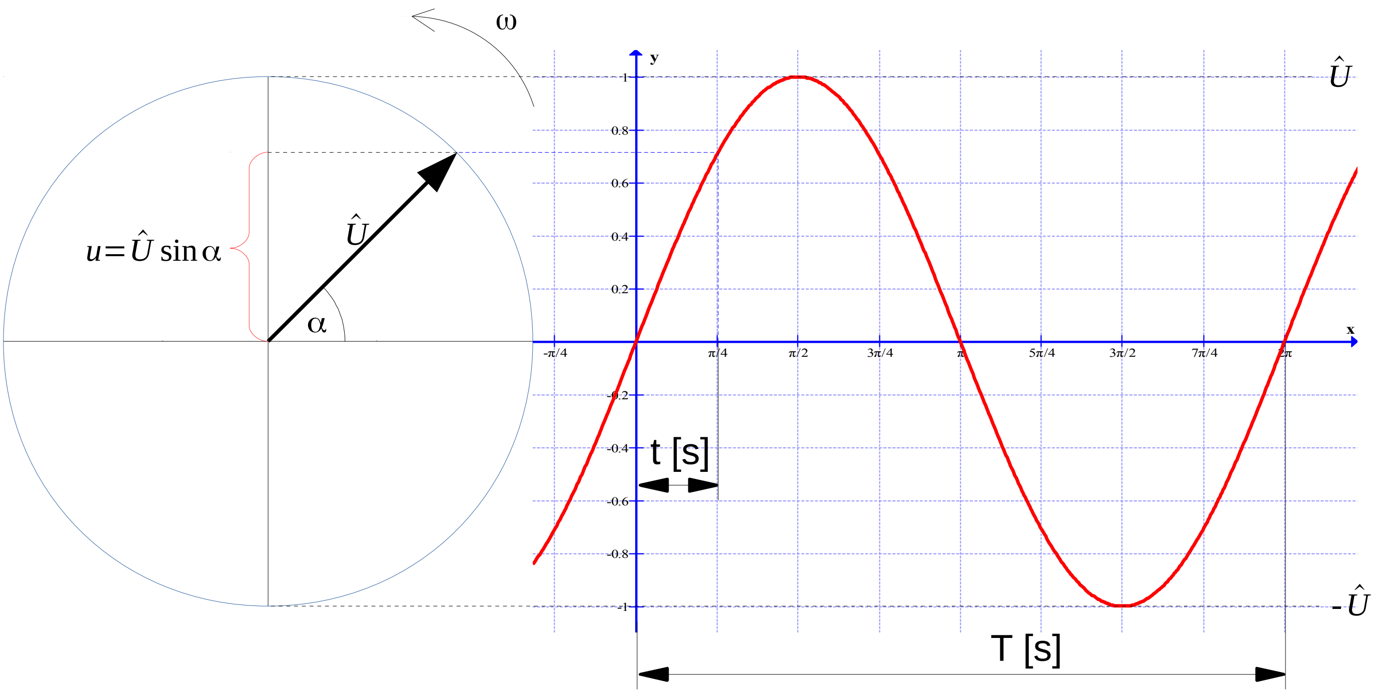


9. ábra a folytonos szinuszfüggvény néhány pillanatnyi értékei

Az eddigi egységnyi hosszúságú vektort „ruházzuk fel tartalommal”: legyen feszültség a vektor, miközben a nagyságát a maximális szinuszos vetületértékkel, $\hat{U}$ -csal jelöljük, melynek jelentése: „U csúcs”. Ez a szinuszos lefolyású feszültség amplitúdója. A szakirodalom a feszültség csúcsértékét a következőképpen jelöli még: U_0 ; U_{cs} ; U_p . Az utóbbi formula p indexe az angol peak (csúcs) rövidítése. Könnyen elfogadható az a tény, hogy ebben az esetben a szinuszos és a koszinuszos vetületek értékei $\hat{U}$ -szorosra növekednek az eredeti egységvektorhoz képest. A jel amplitúdóját tekintve nevezetes érték a csúcstól-csúcsig érték is, vagyis a két szélső amplitúdóérték közötti „távolság”. Jele: U_{cs-cs} , vagy U_{p-p} .



10. ábra a váltakozó feszültség jellemzői



11. ábra a váltakozó feszültség jellemzői

A villamos feszültség értéke pillanatról pillanatra változik, a szinuszos lefolyásnak megfelelően. A pillanatnyi mennyiségeket mindig kis betűvel jelöljük (pl.: *u, i*).

A pillanatnyi feszültség értéke: $u=\hat{U}\cdot\sin\alpha$

Két, egymást követő, azonos fázishelyzetű pillanatnyi érték között eltelt idő a periódusidő, melynek jele: *T*. Számtalan ilyen két pont adódik, a 10. ábrán csak két pillanatnyi érték párt van bejelölve: egy tetszőleges és egy nulla értékű. A periódusidő az az idő, amely szerint a függvény periodikus, vagyis ismétlődő. Gondolkodhatunk másképp is: az az idő, amely alatt a forgóvektor egyszer körbefordul (0-tól 360 fokig), periódusidőnek nevezzük. Egy periódus lényegében egy „rezgés” ideje.

Elemezzük a 9. ábrát! Amíg a forgóvektor a teljes körívet „bejárja”, pontosan *T* periódusidő telik el. Azonban azt is lássuk be, hogy a forgóvektor tetszőleges α szögű elfordulása *t* pillanatnyi időt vesz igénybe (*t* pillanatnyi időhöz tartozik egyébként az *u* pillanatnyi feszültségérték).

Összefoglalva: $360^{o}\,(2\pi)\sim T$, így $\alpha\sim t$.

Ekkor felírhatjuk a következő aránypárt: $\frac{2\pi}{T}=\frac{\alpha}{t}$, ahol $\omega=\frac{2\pi}{T}$ a szögsebesség, a körfrekvencia.

Mint láttuk egy rezgés ideje a periódusidő. Ebből viszont meg tudjuk határozni, hogy egy másodpercben hány rezgés van, vagyis mennyi a másodpercenkénti rezgésszám, vagy frekvencia:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{[s]}=\left[\frac{1}{s}\right]=[Hz]\text{ (hertz).}$$

Az *f* frekvenciájú rezgés periódusideje: $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{\left[\frac{1}{s}\right]}=[s]$.

Térjünk vissza a körfrekvenciára: $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\frac{1}{T}=2\pi f$.

Mindezek tükrében nézzük meg, hogyan írható fel a feszültség pillanatnyi értéke a szögérték, az idő, és a körfrekvencia függvényében:

1. A pillanatnyi feszültség az elfordulás (szög) függvényében: $u=\hat{U}\cdot\sin\alpha$

Láttuk, hogy $\frac{2\pi}{T}=\frac{\alpha}{t}$, ebből következik, hogy $\alpha=t\cdot\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\frac{t}{T}$, ahol 2π a 360^o radiánban, vagyis a teljes kör. A $\frac{t}{T}$ hányados azt mutatja meg, hogy a tényleges szögelfordulás hányszorosa a 360^o-nak. Ez a hányados egy perióduson belül egynél kisebb értékű.

2. Ekkor a feszültség pillanatnyi értéke az idő függvényében: $u=\hat{U}\cdot\sin(2\pi\frac{t}{T})$

Mint ismeretes $\alpha=t\cdot\frac{2\pi}{T}$, valamint $\omega=\frac{2\pi}{T}$, ezért $\alpha=\omega t$

3. Ebben az esetben a feszültség pillanatnyi értéke: $u=\hat{U}\cdot\sin(\omega t)$

Elfordulás radiánban (α):	$\alpha=t\cdot\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\frac{t}{T}$
	$\alpha=\omega t$
Frekvencia (f):	$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{[s]}=\left[\frac{1}{s}\right]=[Hz]$
Periódusidő (T):	$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{\left[\frac{1}{s}\right]}=[s]$
A pillanatnyi idő és a periódusidő viszonya	$\frac{t}{T}$
Pillanatnyi idő (t):	$t=T\cdot\frac{\alpha}{2\pi}$
Körfrekvencia, szögsebesség $\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot\frac{1}{T}=2\pi f$
Pillanatnyi feszültség (u):	$u=\hat{U}\cdot\sin\alpha$
	$u=\hat{U}\cdot\sin(2\pi\frac{t}{T})$
	$u=\hat{U}\cdot\sin(\omega t)$

I. táblázat a váltakozó feszültség jellemzőinek összefoglalása

1. példa Számítsa ki az 50 Hz-es feszültség periódusidejét!

Megoldás: Periódusidő: $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{50\,Hz}=\frac{1}{50\,\frac{1}{s}}=20\cdot 10^{-3}\,s=20\,ms$

2. példa Mekkora a frekvenciája annak a jelnek, melynek a periódusideje 5 ns?

Megoldás: Frekvencia: $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{5\cdot 10^{-9}\,s}=\frac{10^9}{5}\frac{1}{s}=200\cdot 10^6\frac{1}{s}=200\,MHz$

3. példa Milyen fázishelyzetű az 50 Hz-es jel a nullhelyzet után 1,3 ms múlva? Mekkora a pillanatnyi feszültség, ha $\hat{U}=10\,V$

Megoldás: a) a periódusidő: $T_{50\,Hz}=\frac{1}{f}=\frac{1}{50\,Hz}=\frac{1}{50\,\frac{1}{s}}=20\cdot 10^{-3}\,s=20\,ms$

$$\frac{t}{T}=\frac{1{,}3\,ms}{20\,ms}=0{,}065$$

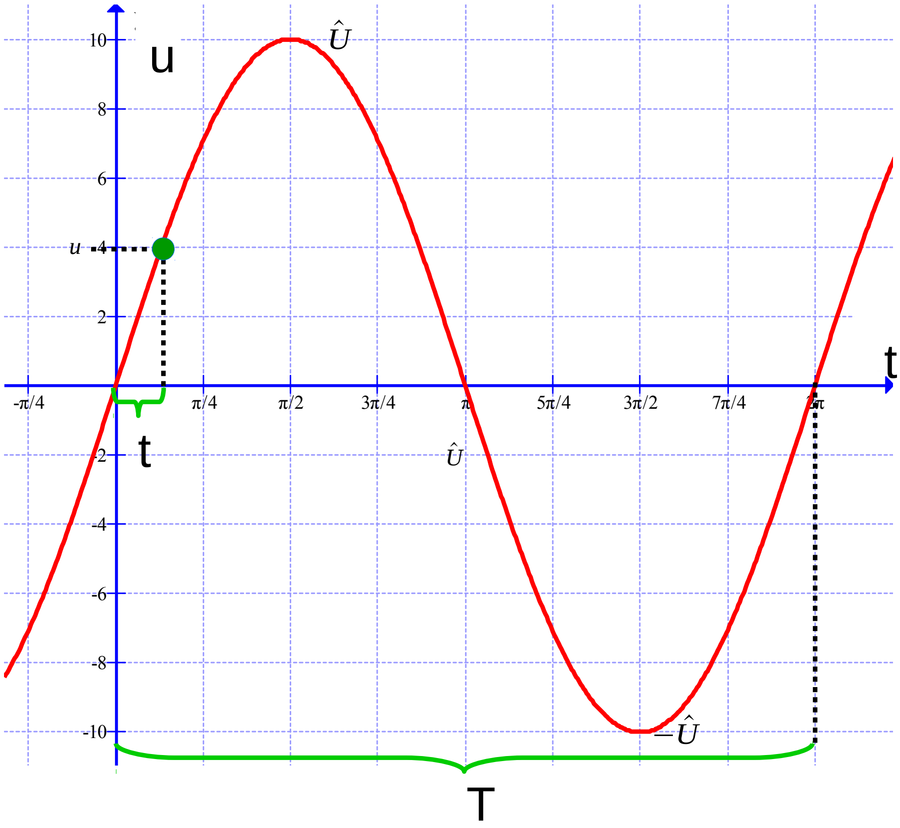
A körfrekvencia: $\omega=2\pi f=2\pi\cdot 50\,Hz=2\pi\cdot 50\frac{1}{s}=100\pi\frac{1}{s}=314{,}16\frac{rad}{s}$

A szögérték radiánban: $\alpha=2\pi\cdot\frac{1{,}3\,ms}{20\,ms}=0{,}408\,rad$

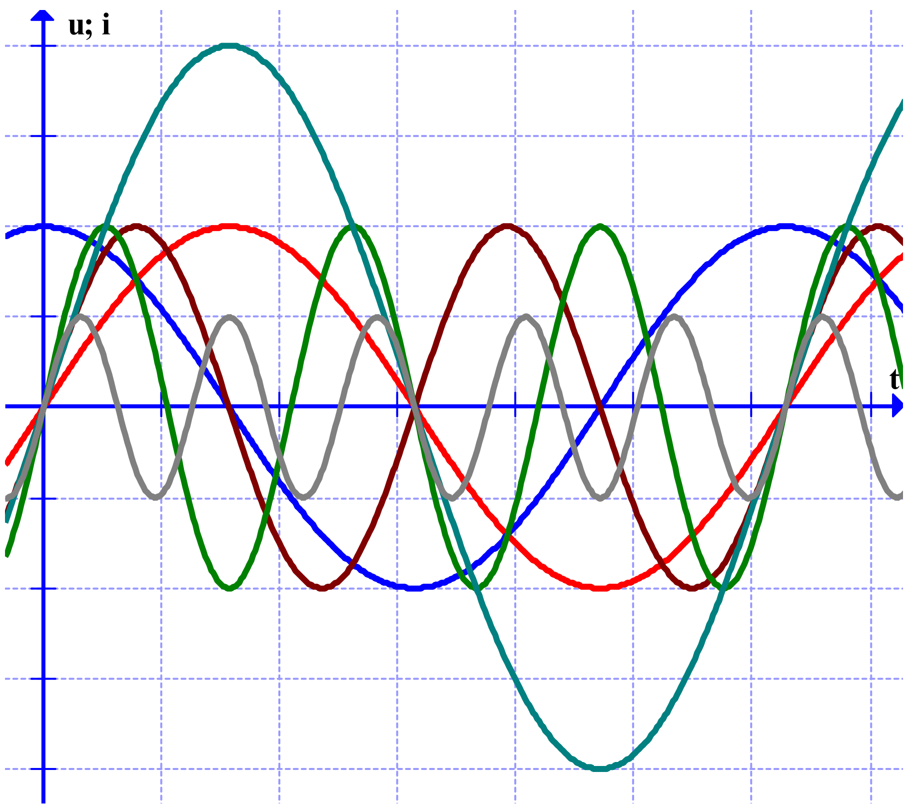
A szögérték fokban: $\alpha=360^o\cdot\frac{1{,}3\,ms}{20\,ms}=23{,}4^o$

A feszültség pillanatnyi értéke:

- $u=\hat{U}\cdot\sin\alpha=10\,V\cdot\sin 23{,}4^o=10\,V\cdot 0{,}397=3{,}97\,V$
- $u=\hat{U}\cdot\sin(2\pi\frac{t}{T})=10\,V\cdot\sin(2\pi\frac{1{,}3\,ms}{20\,ms})=10\,V\cdot\sin(2\pi\cdot 0.065)=$
  $=10\,V\cdot\sin(0.13\pi)=10\,V\cdot\sin 23{,}4^o=10\,V\cdot 0{,}397=3{,}97\,V$
  mivel $0{,}13\pi\,rad=(0{,}13\pi\cdot\frac{180}{\pi})^o=(0{,}13\cdot 180)^o=23{,}4^o$
- $u=\hat{U}\cdot\sin(\omega t)=10\,V\cdot\sin(100\pi\frac{rad}{s}\cdot 1{,}3\cdot 10^{-3}\,s)=$
  $=10\,V\cdot\sin(0.13\pi)=10\,V\cdot\sin 23{,}4^o=10\,V\cdot 0{,}397=3{,}97\,V$
  mivel $0.13\pi\,rad=(0{,}13\pi\cdot\frac{180}{\pi})^o=(0{,}13\cdot 180)^o=23{,}4^o$



12. ábra a 3. példa megoldásának ábrázolása



13. ábra különböző frekvenciájú (f), amplitúdójú $(\hat{U})$ és fázishelyzetű szinuszos rezgések