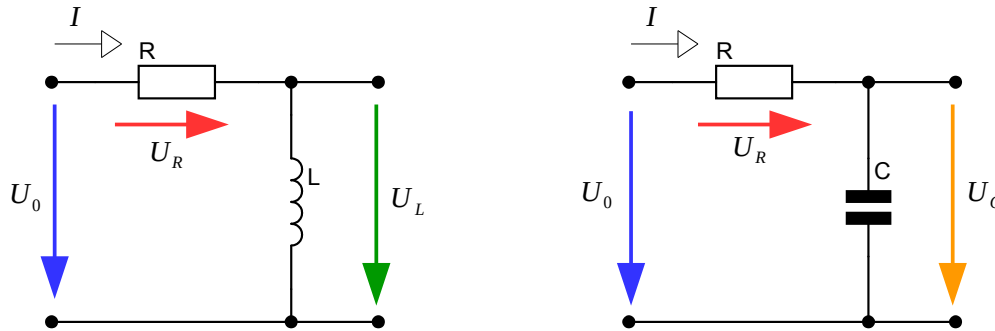
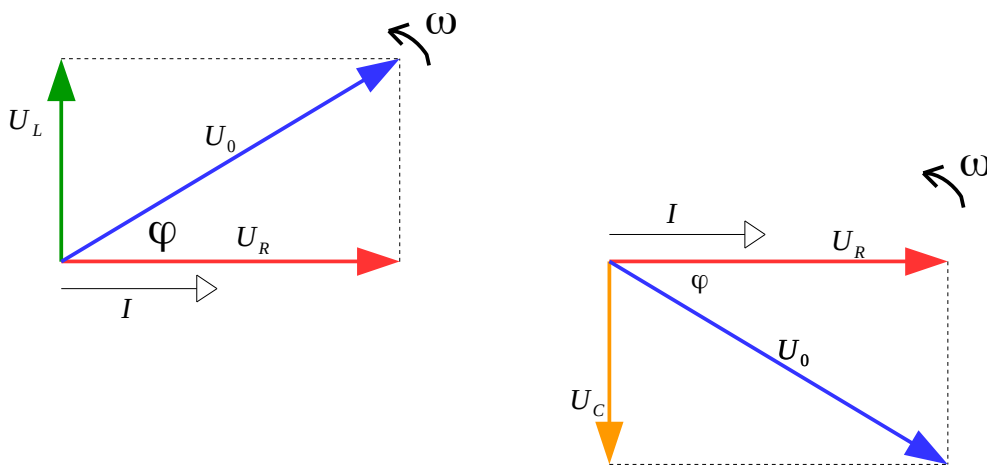


Ellenállás, kondenzátor és tekercs soros kapcsolása

Az átmeneti jelenségek vizsgálatakor – soros RL- és soros RC-körben – egyértelművé vált, hogy a tekercsen késik az áram a feszültséghez képest, a kondenzátoron pedig a feszültség késik az áramhoz képest. Váltakozóáramú körökben ez a késés, pontosan 90 fok. Ezt figyelhetjük meg az 1. és a 2. ábrán. Lényegében viszonyítás kérdése, de lássuk meg, ez azt jelenti, hogy a valós terhelésen (ellenálláson) eső feszültséghez képest a kondenzátoron 90 fokot késik, a tekercsen pedig 90 fokot siet a feszültség.



1. ábra Soros RL- és soros RC-kör, mint négyfólus – kapcsolási rajzok



2. ábra Soros RL- és soros RC-kör fázorábrája

A forrásfeszültség: $U_0 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$

A forrásfeszültség: $U_0 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$

Az ellenállás feszültsége a forrásfeszültség koszinuszos vetülete: $U_R = U_0 \cdot \cos \varphi$

Az ellenállás feszültsége a forrásfeszültség koszinuszos vetülete: $U_R = U_0 \cdot \cos \varphi$

Ebből $\cos \varphi = \frac{U_R}{U_0}$

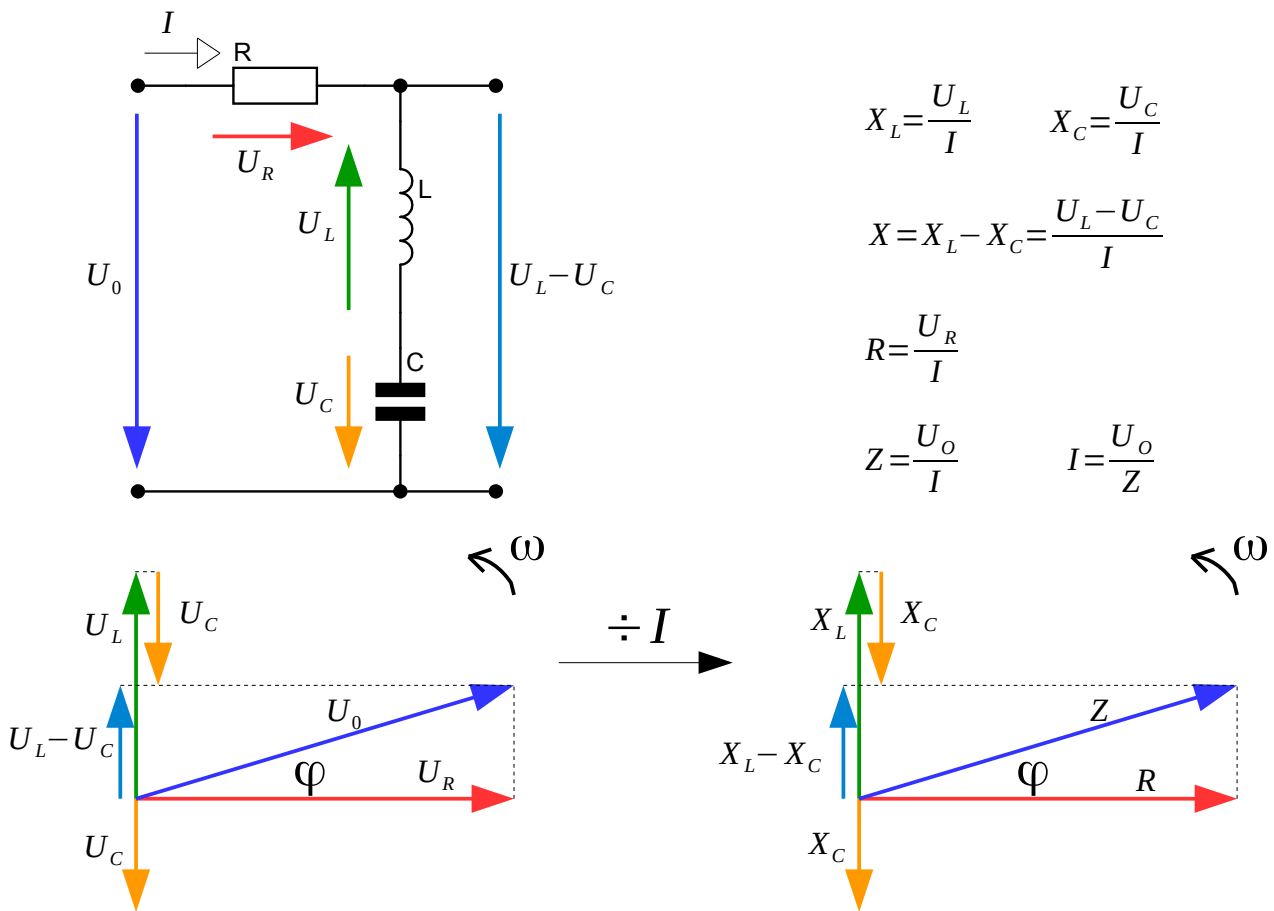
Ebből $\cos \varphi = \frac{U_R}{U_0}$

Így a valós feszültség és a forrásfeszültség által bezárt szög: $\varphi = \arccos\left(\frac{U_R}{U_0}\right)$

Így a valós feszültség és a forrásfeszültség által bezárt szög: $\varphi = \arccos\left(\frac{U_R}{U_0}\right)$

Tekintettel arra, hogy soros körökről van szó, megállapítható, hogy közös az áram. Noha a soros egyenáramú köröknél megtanultuk, hogy Kirchoff II. törvénye (huroktörvény) szerint a részfeszültségek összege egyenlő a forrás feszültségével, itt ez nem járható számítási mód, a valós ellenálláson és a reaktanciákon eső feszültségek által bezárt szög(ek) miatt. Tehát a Pythagoras-tétel alkalmazása válik szükségessé.

Az 1. ábra szerinti soros köröket egyesítsük úgy, ahogy azt a 3. ábra mutatja! Az így kialakított kapcsolást soros RLC-körnek nevezzük. Az kapott kapcsolás fázorábrája is a 3. ábra szerinti. Vegyük észre: a tekercsen eső feszültség (U_L) 90 fokot siet, a kondenzátoron mérhető feszültség (U_C) pedig 90 fokot késik a valós ellenálláson eső feszültséghez (U_R) képest, így a feszültségfázorok egymáshoz képest mindig 180 fokot zárnak be. A képzetes rész nagyságát tehát a két feszültségfázor különbsége adja. Amennyiben a feszültség-fázorára komponenseit elosztjuk az egyetlen közös komponenssel, vagyis az árammal, akkor az impedancia-fázorábrát kapjuk eredményül, mely arányos a feszültség-fázorábrával.



3. ábra Soros RLC-kör és fázorábrája

A feszültség-fázorára összefüggései:

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$U_R = U_0 \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U_0} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{U_R}{U_0}\right)$$

Az impedancia-fázorára összefüggései:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right)$$

Ismétlő fogalmak:

- ellenállás: az impedancia valós része;
- a kondenzátor kapacitív látszólagos ellenállása: kapacitív reaktancia, kapacitancia, az impedancia képzetes része: $|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$;
- a tekercs induktív látszólagos ellenállása: induktív reaktancia, induktancia, az impedancia képzetes része: $|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$;
- impedancia: komplex ellenállás, amely valós ellenállásból és látszólagos ellenállásból tevődik össze.

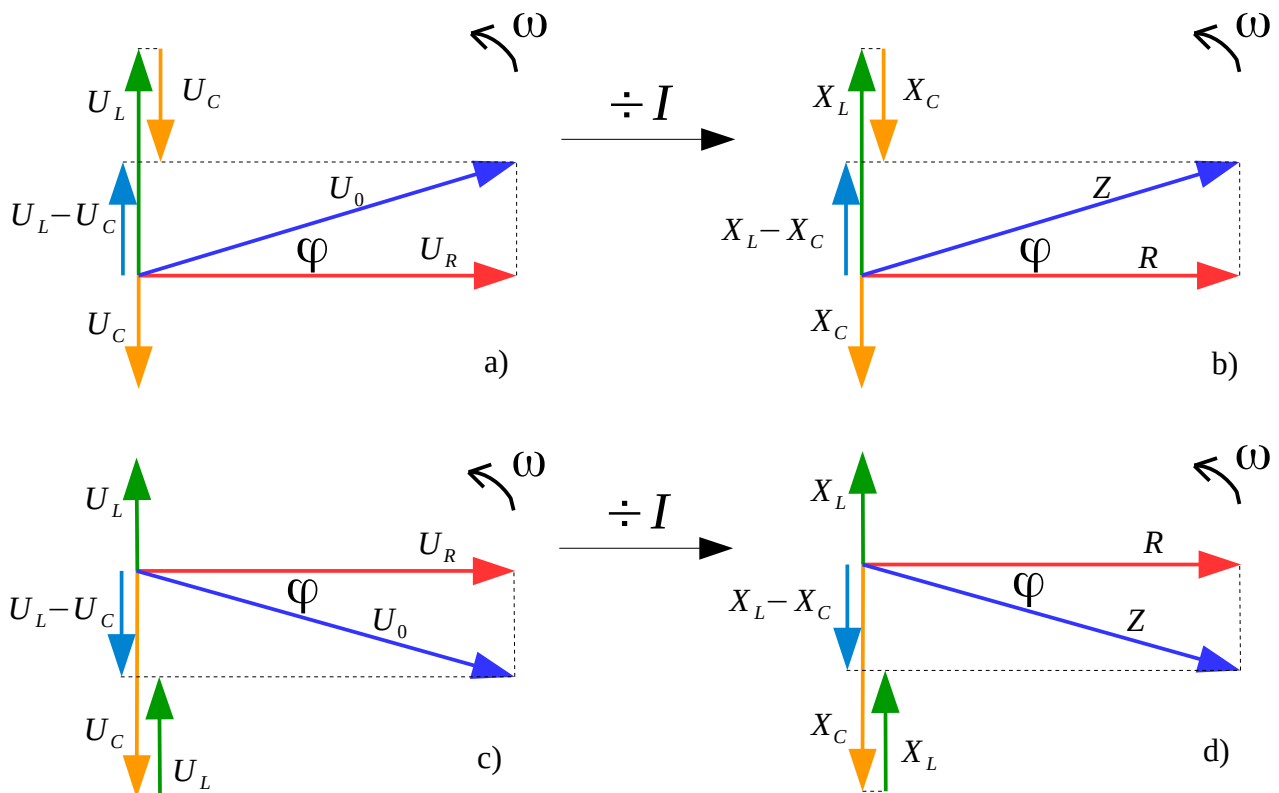
Tanulmányaink folyamán láttuk, hogy mind a kapacitív, mind pedig az induktív reaktancia frekvenciafüggő.

Kapacitív reaktancia: $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$, valamint frekvenciafüggése: $X_C \sim \frac{1}{f}$.

Induktív reaktancia: $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$, valamint frekvenciafüggése: $X_C \sim f$.

ha ω nő, akkor $\left\{ \begin{array}{l} \text{az } \omega L, \text{ vagyis } X_L \text{ nő} \\ \text{az } \frac{1}{\omega C}, \text{ vagyis } X_C \text{ csökken} \end{array} \right\}$ ha ω csökken, akkor $\left\{ \begin{array}{l} \text{az } \omega L, \text{ vagyis } X_L \text{ csökken} \\ \text{az } \frac{1}{\omega C}, \text{ vagyis } X_C \text{ nő} \end{array} \right\}$

Amennyiben tehát egy adott soros RLC-kapcsolás esetén változtatjuk a frekvenciát, úgy a reaktanciák értéke is változik, ezzel a rajtuk mérhető feszültség is, valamint a bezárt szög is. Mindennek ismeretében belátható, hogy bizonyos frekvenciákon az induktív reaktancia a domináns, míg más frekvenciákon a kapacitív dominancia a jellemző:



4. ábra induktív [a) és b)], valamint kapacitív [c) és d)] dominancia az impedanciában

Összefoglalva az eddig látottakat:

Induktív dominanciáról beszélünk, ha:

- $X_L - X_C > 0$;
- $U_L - U_C > 0$;
- $\varphi > 0$

Kapacitív dominanciáról beszélünk, ha:

- $X_L - X_C < 0$;
- $U_L - U_C < 0$;
- $\varphi < 0$

Nézzünk egy számpéldát!

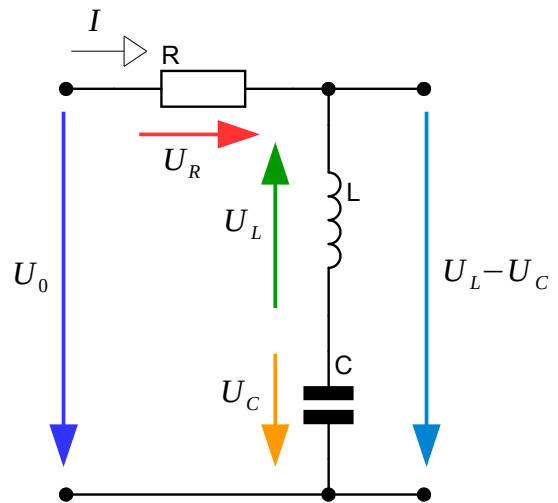
Állítsunk össze egy soros RLC-kört, a következő értékek és adatok mellett!

$$R=100 \Omega ; L=1 H ; C=5 \mu F ;$$

$$U_0=230 V ; f=50 \frac{1}{s}$$

Számítsuk ki a következőket!

- Induktív reaktancia: $X_L=?$;
- Kapacitív reaktancia: $X_C=?$;
- Eredő reaktancia: $X=?$;
- Impedancia: $Z=?$;
- Áramerősség: $I=?$;
- A tekercsen eső feszültség: $U_L=?$;
- A kondenzátoron eső feszültség: $U_C=?$;
- Az ellenálláson eső feszültség: $U_R=?$;
- A forrásfeszültség ellenőrzése: $U_0=?$;
- A fázisszög: $\varphi=?$



4. ábra a feladat kapcsolási rajza

Induktív reaktancia: $X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 1 H = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 1 \frac{Vs}{A} = 100\pi \frac{V}{A} = 314,16 \Omega$

Kapacitív reaktancia: $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 5 \mu F} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}} = \frac{10^6}{500\pi} \frac{V}{A} = 636,62 \Omega$

Az eredő reaktancia: $X = X_L - X_C = 314,16 \Omega - 636,62 \Omega = -322,46 \Omega \Rightarrow$ kapacitív jellegű

Fontos megállni ezen a helyen! Mint ismeretes negatív ellenállás nem létezik, a negatív előjel általában jelölhet csökkenő változást, vagy – mint ahogy esetünkben – azt mutatja meg, hogy a kapott eredő reaktancia kapacitív jellegű.

Az impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{100 \Omega^2 + (-322,46 \Omega)^2} =$
 $= \sqrt{10000 \Omega^2 + 103980,45 \Omega^2} = \sqrt{113980,46 \Omega^2} = 337,61 \Omega$

Az áramerősség: $I = \frac{U_0}{Z} = \frac{230 \text{ V}}{337,61 \Omega} = 0,68126 \text{ A} = 681,25 \text{ mA}$

A tekercsen eső feszültség: $U_L = X_L \cdot I = 314,16 \Omega \cdot 681,25 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 214,02 \text{ V}$

A kondenzátoron eső feszültség: $U_C = X_C \cdot I = 314,16 \Omega \cdot 681,25 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 433,70 \text{ V}$

Az ellenálláson eső feszültség: $U_R = R \cdot I = 100 \Omega \cdot 681,25 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 68,13 \text{ V}$

A forrásfeszültség ellenőrzése: $U_0 = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{68,13 \text{ V}^2 + (214,02 \text{ V} - 433,70 \text{ V})^2} = 230 \text{ V}$

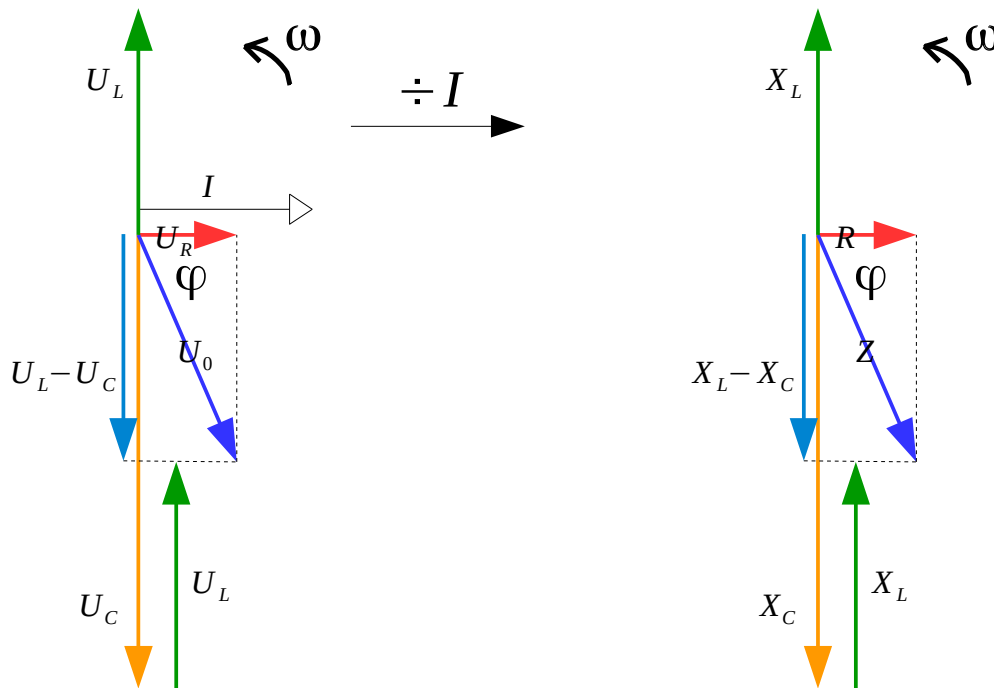
A $\cos \varphi$ (a feszültség-fázorábrából): $\cos \varphi = \frac{U_R}{U_0} = \frac{68,13 \text{ V}}{230 \text{ V}} = 0,296$

A $\cos \varphi$ (az impedancia-fázorábrából): $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{100 \Omega}{337,61 \Omega} = 0,296$

A fázisszög: $\varphi = \arccos(0,296) = (-) 72,77^\circ \Rightarrow$ Lássuk meg: azért negatív a szög értéke, mert kapacitív az impedancia, vagyis a kapacitív jellegnek megfelelően valóban késés van.

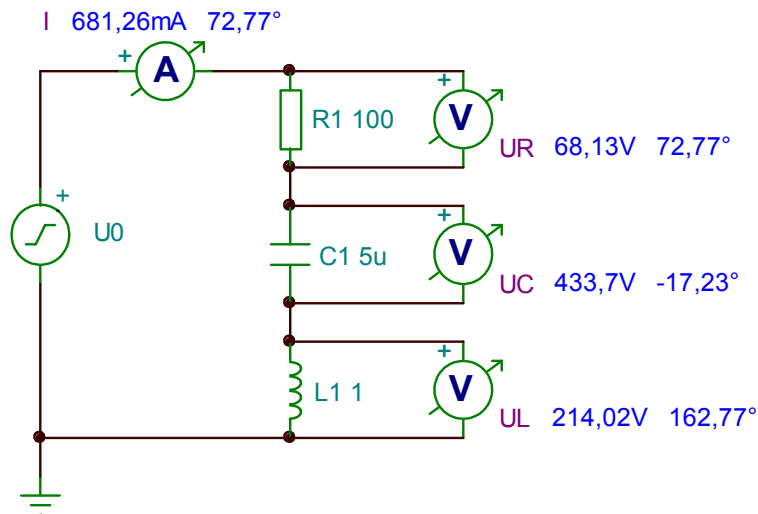
A fázisszög másképpen is kiszámítható. A Z impedancia meredeksége:

$$m = \tan(\varphi) = \frac{X}{R} = \frac{-322,16 \Omega}{100 \Omega} = -3,2216 \quad \text{ebből} \quad \varphi = \arctan(-3,2216) = -72,77^\circ$$



5. ábra a kidolgozott feladat fázorábrái

Állítsuk össze a feladat kapcsolási rajzát a [TINA-TI](#) áramkör-szimulátor segítségével, majd végezzük el AC analízisét!



7. ábra a kidolgozott feladat szimulációs mérése

A szimulációs mérés eredményeit lehetőségünk van összehasonlítani a számításainkkal.

<i>Villamos jellemzők</i>	<i>Számított adatok</i>	<i>Szimulációs adatok</i>
Induktív reaktancia: X_L	314,16 Ω	–
Kapacitív reaktancia: X_C	636,62 Ω	–
Eredő reaktancia: X	–322,46 Ω	–
Impedancia: Z	337,61 Ω	–
Áramerősség: I	681,25 mA	681,26 mA
A tekercsen eső feszültség: U_L	214,02 V	214,02 V
A kondenzátoron eső feszültség: U_C	433,70 V	433,70 V
Az ellenálláson eső feszültség: U_R	68,13 V	68,13 V
A forrásfeszültség ellenőrzése: U_0	230 V	–
A fázisszög, U_0 és U_R által bezárt szög: φ	–72,77°	(-) 72,77°
U_0 és U_C által bezárt szög	–	(-) 17,23°
U_0 és U_L által bezárt szög	–	162,77°
U_L és U_C által bezárt szög	–	180°

Jól látható az adatokból, hogy a két reaktancia feszültsége (és vele együtt maguk a reaktanciák is) merev kapcsolatban vannak egymással (180 fok).

Soros RLC-rezgőkör

Láthatjuk, hogy létezik olyan soros RLC-kör, amelyik kapacitív jellegű, s van, amelyik induktív jelleget mutat, a domináns reaktancia függvényében. Joggal tehetjük fel a kérdést: mi van akkor, ha a két reaktancia azonos nagyságú? Ez az állapot csak egy frekvencián következik be. Azt az állapotot, ahol a két reaktancia nagysága – és vele együtt a két reaktancián eső feszültség nagysága – megegyezik, rezonancia-frekvenciának nevezzük.

A rezonancia-frekvencia meghatározásának kiinduló tétele tehát a reaktanciák nagyságának azonossága:

$$X_L = X_C \quad \text{/helyettesítsünk be!}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{/rendezzük át az egyenletet } \omega - \text{ra!}$$

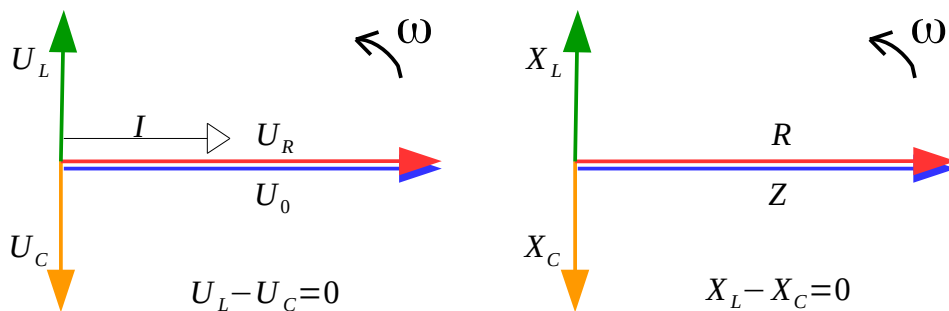
$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

rezonancia-frekvencia: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ez a Thomson-képlet.

Mivel $X_L = X_C$, ezért belátható, hogy $X = X_L - X_C = 0$. Ha eredő reaktancia nulla, akkor az $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ képlet értelmében: $Z = R$. Amennyiben az impedancia megegyezik az ellenállás értékével, fázistolásról sem beszélhetünk, vagyis $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$. Természetesen hasonlóképpen alakul a helyzet a feszültségek esetében is.

$$\begin{aligned} X_L = X_C &\Rightarrow U_L = U_C \\ X_L - X_C = 0 &\Rightarrow U_L - U_C = 0 \\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} &\Rightarrow U_0 = \sqrt{U^2 + (U_L - U_C)^2} \\ Z = R &\Rightarrow U_0 = U_R \\ \varphi = 0 &\Rightarrow \varphi = 0 \end{aligned}$$

Mivel a reaktanciákon eső feszültség nagysága egyezik meg a soros rezonancia-frekvencián, ezért feszültségrezonanciáról beszélünk. A soros rezonancián a legnagyobb lesz a soros RLC-kör árama, hiszen az impedancia eléri a minimumát. Ekkor $I_{f_0} = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R}$.



7. ábra a feszültség- és impedancia-fázorábra a rezonancia-frekvencián

Nézzünk egy számpéldát a soros feszültségrezonanciára! Keressük meg az előző példánk rezonancia-frekvenciáját!

Állítsunk össze egy soros RLC-kört, a következő értékek és adatok mellett!

$$R=100\ \Omega ; L=1\ H ; C=5\ \mu F ; U_0=230\ V$$

Számítsuk ki a következőket!

Rezonancia-frekvencia: $f_0=?$

Induktív reaktancia: $X_L=?$;

Kapacitív reaktancia: $X_C=?$;

Eredő reaktancia: $X=?$;

Impedancia: $Z=?$;

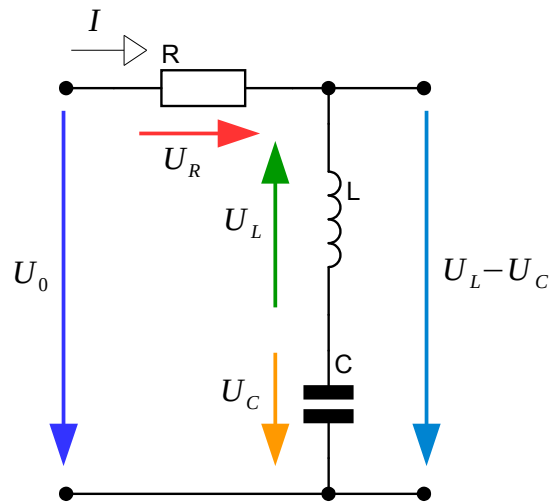
Áramerősség: $I=?$;

A tekercsen eső feszültség: $U_L=?$;

A kondenzátoron eső feszültség: $U_C=?$

Az ellenálláson eső feszültség: $U_R=?$;

A fázisszög: $\varphi=?$



8. ábra a feladat kapcsolási rajza

$$\text{A rezonancia-frekvencia: } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1\text{ H} \cdot 5\ \mu\text{ F}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1\ \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^2}} = \frac{10^3}{2\pi\sqrt{5}} \frac{1}{\text{s}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 100}{\pi} = 71,176 \frac{1}{\text{s}} = 71,176\ \text{Hz}$$

$$\text{Induktív reaktancia: } X_L = \omega L = 2\pi f_0 L = 2\pi \cdot 71,176 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1\ \text{H} = 2\pi \cdot 71,176 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 447,214\ \Omega$$

$$\text{Kapacitív reaktancia: } X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 71,176 \frac{1}{\text{s}} \cdot 5\ \mu\text{ F}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot 71,176 \frac{1}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{V}}} \mu\text{ F} = 447,214\ \Omega$$

$$\text{Eredő reaktancia: } X = X_L - X_C = 447,214\ \Omega - 447,214\ \Omega = 0\ \Omega$$

$$\text{Impedancia: } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + 0^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\text{Áramerősség: } I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = \frac{230\ \text{V}}{100\ \Omega} = 2,3\ \text{A}$$

$$\text{A tekercsen eső feszültség: } U_L = X_L \cdot I = 447,214\ \Omega \cdot 2,3\ \text{A} = 1028,59\ \text{V}$$

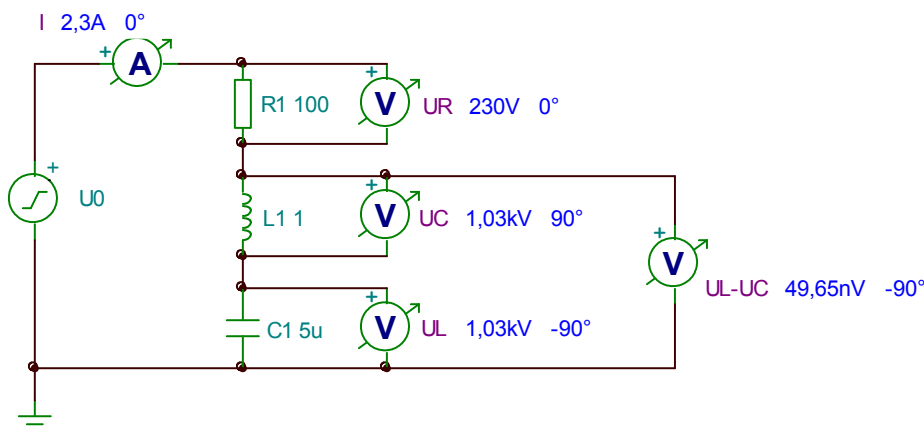
$$\text{A kondenzátoron eső feszültség: } U_C = X_C \cdot I = 447,214\ \Omega \cdot 2,3\ \text{A} = 1028,59\ \text{V}$$

Tessék megfigyelni, hogy a tekercsen és a kondenzátoron igen nagy feszültségek alakulhatnak ki, miközben a forrás feszültsége töredéke eme feszültségeknek. A reaktanciákon eső feszültség nagysága nagyban függ az áramerősségtől, közvetve pedig a soros ellenállástól. $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$.

Az ellenálláson eső feszültség: $U_R = R \cdot I = 100 \Omega \cdot 2,3 A = 230 V = U_0$

A fázisszög: $\varphi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right)$, mivel $Z = R$, ezért $\varphi = \arccos(1) = 0^\circ$

Szimulációs ellenőrzés következék. Állítsuk össze a feladat kapcsolási rajzát a [TINA-TI](#) áramkör-szimulátor segítségével, majd végezzük el AC analízisét!



9. ábra

A szimulációs mérés eredményeit lehetőségünk van összehasonlítani a számításainkkal.

Villamos jellemzők	Számított adatok	Szimulációs adatok
Induktív reaktancia: X_L	447,214 Ω	–
Kapacitív reaktancia: X_C	447,214 Ω	–
Eredő reaktancia: X	0 Ω	–
Impedancia: Z	100 Ω	–
Áramerősség: I	2,3 A	2,3 A
A tekercsen eső feszültség: U_L	1028,59 V	1,03 kV
A kondenzátoron eső feszültség: U_C	1028,59 V	1,03 kV
Az ellenálláson eső feszültség: U_R	230 V	230 V
A forrásfeszültség ellenőrzése: U_0	230 V	–
A fázisszög, U_0 és U_R által bezárt szög: φ	0°	0°
U_0 és U_C által bezárt szög	–	–90°
U_0 és U_L által bezárt szög	–	90°
U_L és U_C által bezárt szög	–	180°