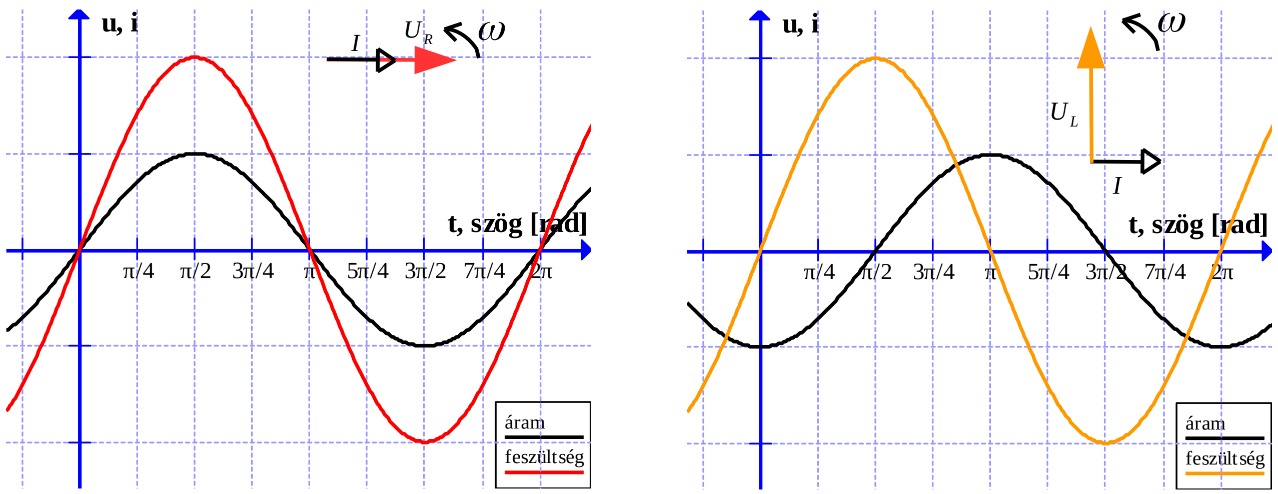
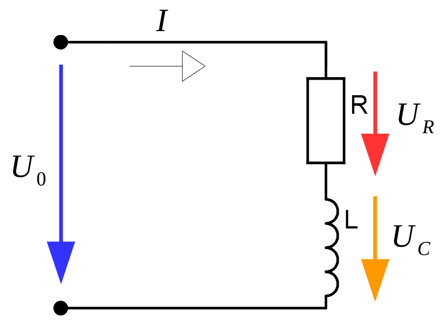
A soros RL-kör

Mint ismeretes, a tekercsen az áram 90 fokot késik a feszültséghez képest, ahogyan az az 1. ábrán látható. A valós terhelésen a feszültség és az áramerősség azonos fázisú. Lényegében viszonyítás kérdése, de lássuk meg, hogy a valós terhelésen (ellenálláson) eső feszültséghez képest a tekercsen 90^o -ot siet a feszültség.

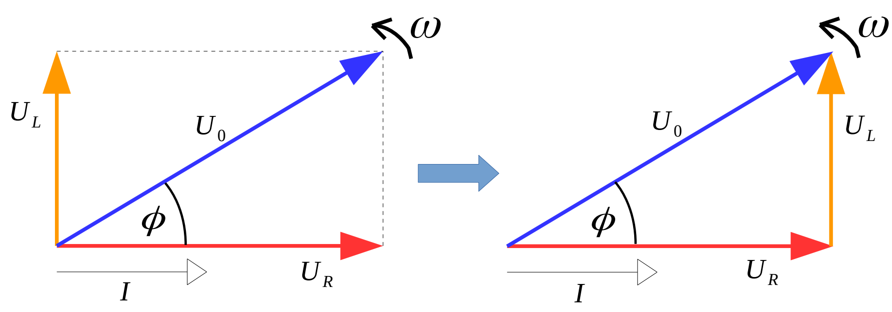


1. ábra Feszültség és áramviszonyok az ellenálláson, illetve a tekercsen



2. ábra a soros RL-kör kapcsolási rajza

Tekintettel arra, hogy soros körről van szó, megállapítható, hogy közös az áram. Noha a soros egyenáramú köröknél megtanultuk, hogy Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény) szerint a részfeszültségek összege egyenlő a forrás feszültségével, itt ez nem járható számítási mód, a valós ellenálláson és a reaktancián eső feszültségek által bezárt szög miatt. Tehát a Pitagorasz-tétel alkalmazása válik szükségessé. A 3. ábrán követhetjük nyomon a soros RL-kör feszültségviszonyait. A kapacitás és a valós ellenállás feszültségének vektoriális összege adja a soros RC-kört tápláló forrás feszültségét (komplex feszültség). Mint említettük, a Pitagorasz-tétel alkalmazása eme helyen kap aktualitást. Egy egyszerű eltolással a (U_L) a 3. b) ábra szerinti háromszöget kapva a művelet egyértelműen elvégezhető: $|U_0|=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$.

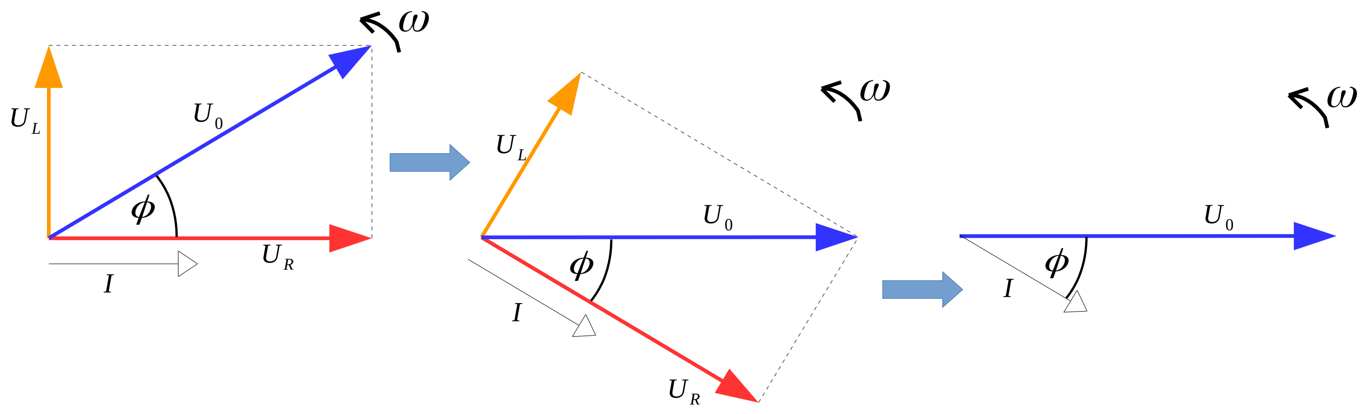


a) b)

3. ábra

A feszültség-fázorábra elkészítése

- Soros kapcsolásról beszélünk, vagyis közös az áram. Rajzoljuk fel vízszintesen a kör egyetlen közös mennyiségének – az áramnak – a fázorát (I).
- Jelöljük a fázor forgásirányát!
- Az ellenálláson a feszültség mindig azonos fázisú, ennek megfelelően rajzoljuk fel a fázort (U_R)!
- A tekercsen a feszültség (U_L) pontosan 90^o -ot siet az áramhoz képest. Ennek megfelelően vegyük fel a fázorát!
- Vektoriálisan összegezzük a tekercs és az ellenállás feszültség-fázorát, mely által megkapjuk a soros RL-kört tápláló generátor feszültség-fázorát (U_0)!
- A (ϕ) szög a kör áramának és a forrás feszültségének fázora között értelmezett. Jelöljük be a (ϕ) -szöget!

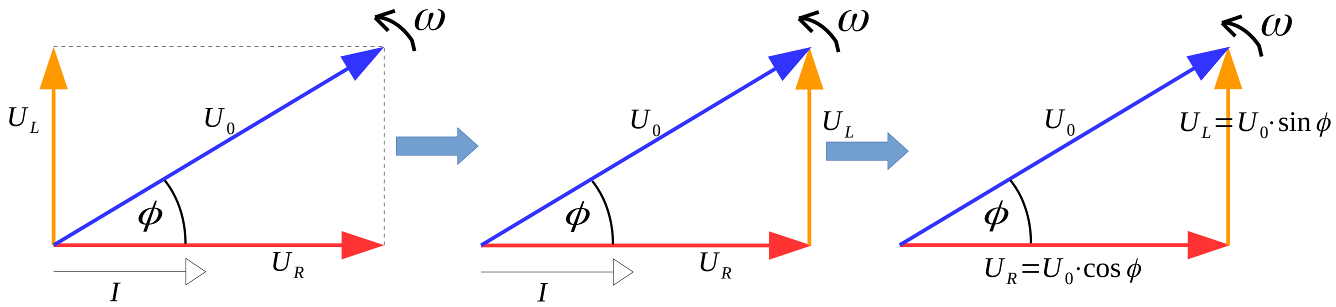


4. ábra

A 4. ábra szerinti elrendezésben a következőkre lehetünk figyelmesek:

- A forrás feszültsége a két feszültség-komponens vektoriális összege;
- A (ϕ) szög a forrás feszültsége és a hálózat által „igényelt" áramerősség fázora között értelmezett;
- Az ellenálláson eső feszültség és a rajta átfolyó áramerősség mindig azonos fázisú, így a fázoraik azonos irányúak. Mindebből az következik, hogy a (ϕ) szög a forrás, valamint az ellenállás feszültségének fázora között is értelmezhető;
- Ha az impedancia induktív jellegű, akkor a forrás feszültségéhez képest az áram késik!

A 2. b) ábra szerinti eltolással kapott ábrában egy háromszöget kaptunk. A háromszög két befogója az U_R és az U_L feszültségkomponens, az átfogó pedig az U_0 forrásfeszültség. Trigonometriai ismereteinket felelevenítve (4. ábra) belátható, hogy az U_R fázor az U_0 fázor koszinuszos vetülete: $U_R = U_0 \cdot \cos\phi$, az U_L fázor pedig a szinuszos vetülete: $U_L = U_0 \cdot \sin\phi$.



5. ábra

Az impedancia-fázorábra elkészítése

Ohm törvénye alapján tudjuk, hogy az ellenállás úgy számítható ki, hogy a kétpóluson eső feszültséget elosztjuk a rajta átfolyó áramerősséggel. Ez igaz valós ellenállás esetén. Hasonlóan számítható a kapacitás látszólagos ellenállása is, vagyis a reaktanciája.

Ismételjünk néhány vonatkozó fogalmat!

- ellenállás: az impedancia valós része: $R=\frac{U_R}{I}$;
- a tekercs induktív látszólagos ellenállása: induktív reaktancia, induktancia, az impedancia induktív képzetes része: $X_L=\omega\cdot L=\frac{U_L}{I}$;
- impedancia: komplex ellenállás, amely valós ellenállásból és látszólagos ellenállásból tevődik össze. Mivel az impedancia képzetes és valós része nem azonos fázisú (90^o -os szöget zárnak be), ezért az impedancia kiszámítása a Pitagorasz-tétel segítségével lehetséges: $|Z|=\sqrt{R^2+X_L{}^2}=\frac{U_0}{I}$

Tanulmányaink folyamán láttuk, hogy mind a induktív, reaktancia frekvenciafüggő.

Induktív reaktancia: $X_C=\omega\cdot L=2\cdot\pi\cdot f\cdot L$, valamint frekvenciafüggése: $X_L\sim f$.

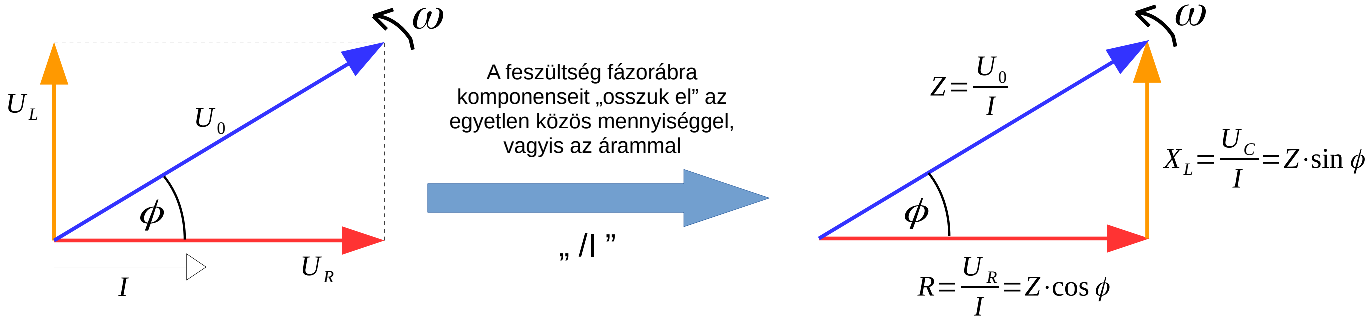
$$ha\,\omega\ \ nő, akkor\,\omega\,L, vagyis\,X_L\,nő$$

Amennyiben tehát egy adott soros RL-kapcsolás esetén változtatjuk a frekvenciát (f,ω), úgy az induktív reaktancia értéke is változik, akkor is, ha a forrás feszültségét (U_0) nem változtattuk. Ha az induktív reaktancia (X_L) értéke változik, s vele együtt az impedancia (Z) értéke, az impedancia és a valós ellenállás által bezárt szög (ϕ), valamint a köráram (I) is változik. Ha csökkentjük a frekvenciát, akkor az induktív reaktancia csökken, vele együtt a (ϕ) szög és az impedancia is, az áram viszont nő. Ha növeljük a frekvenciát, megfordul a helyzet: az induktív reaktancia értéke nő, vele együtt a (ϕ) szög és az impedancia is, miközben a köráram csökken. Amennyiben a feszültség fázorábra valamennyi komponensét elosztjuk a soros RC-kör egyetlen közös mennyiségével (vagyis az árammal), akkor az impedancia komponenseket kapjuk eredményül. Lássuk meg, hogy az eredményül kapott impedancia-fázorábra a feszültség-fázorábrával arányos. Az impedancia koszinuszos vetülete az ellenállás, a szinuszos vetülete pedig az induktív reaktancia.

$R=\frac{U_R}{I}$; $X_L=\frac{U_L}{I}$; $|Z|=\frac{U_0}{I}$.

$|U_0|=\sqrt{U_R{}^2+U_L{}^2}$ => / I => $|Z|=\sqrt{R^2+X_L{}^2}$

$R=|Z|\cdot\cos\phi$ és $X_L=|Z|\cdot\sin\phi$



6. ábra Az impedancia-fázorábra származtatása

A teljesítmény-fázorábra elkészítése

Egyenáramú körök esetén megtanultuk, hogy egy valós terhelésen (ellenállás) hővé alakuló teljesítmény az ellenállás kapcsain mérhető feszültség, valamint a rajta átfolyó áramerősség szorzataként számítható. Hővé alakuló teljesítmény (valós) jön létre az ellenálláson váltakozó áramú körben is, ám ilyenkor a pillanatnyi teljesítményt, csúcsteljesítményt, valamint effektív teljesítményt értelmezünk. Valós teljesítmény csak valós (ohmos, rezisztív) ellenálláson tud létrejönni, amely kétpóluson eső feszültség és a rajta átfolyó áramerősség azonos fázisú.

Egyenáramú teljesítmény: $P = U_R \cdot I_R$

Váltakozó áramú teljesítmény: Pillanatnyi teljesítmény: $p = u_R \cdot i_R$

Csúcsteljesítmény: $\hat{P} = \hat{U} \cdot \hat{I}$

Effektív teljesítmény: $P_{eff} = \frac{\hat{P}}{2} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_{eff} \cdot I_{eff}$

Az induktív reaktancia áramához képest a feszültsége pontosan 90^o -ot siet. A 7. ábrán látható, hogy ebben az esetben negyed periódusig azonos, negyed periódusig pedig ellentétes előjelű a feszültség és az áramerősség. Ennek megfelelően negyed periódusig teljesítményt vesz fel a hálózatból, mely teljesítményt a következő negyed periódusban leadja. Lényegében teljes periódusra vonatkoztatva elmondható, hogy az induktív reaktancia teljesítménye nulla, tehát nincs hatásos teljesítmény $\left(\sum P = 0\right)$.

1. negyed periódus: $P_{(1)} = U \cdot I = (+) \cdot (+) = (+)$ => felvesz
2. negyed periódus: $P_{(2)} = U \cdot I = (+) \cdot (-) = (-)$ => lead
3. negyed periódus: $P_{(3)} = U \cdot I = (+) \cdot (+) = (+)$ => felvesz
4. negyed periódus: $P_{(4)} = U \cdot I = (+) \cdot (-) = (-)$ => lead

ahol: $|P_{(1)}| = |P_{(2)}|$ és $|P_{(3)}| = |P_{(4)}|$;

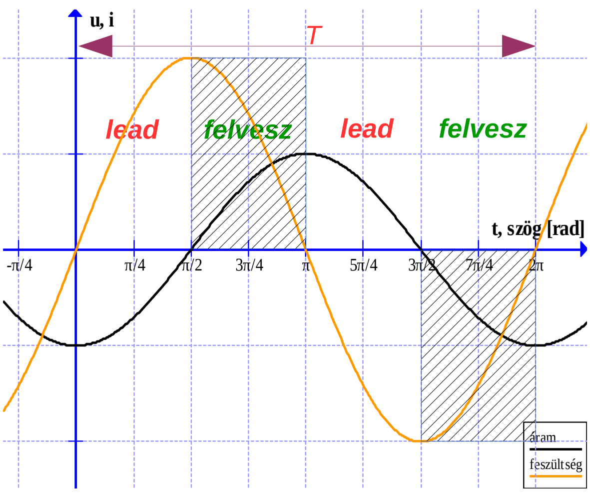
$P_{(1)} = P_{(3)}$ és $P_{(2)} = P_{(4)}$.

Mindebből következik, hogy:

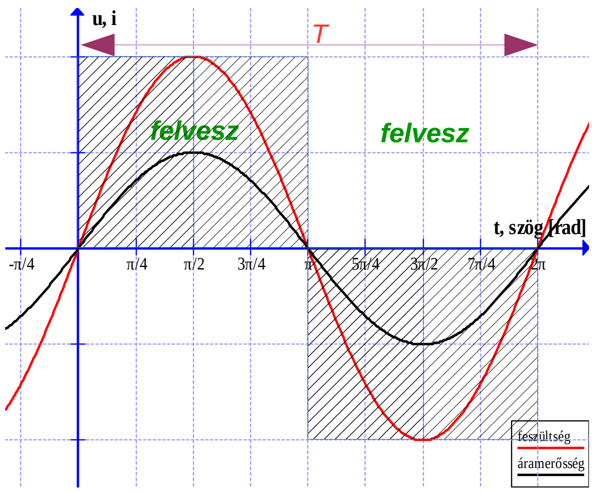
$\sum P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$

Látszólag: $P = U \cdot I$

Valójában: $P = 0$



7. ábra Az induktív reaktancia teljesítménye



8. ábra Az ellenállás teljesítménye

Lássuk meg: a tekercsen (mint reaktancián) eső feszültség és a rajta átfolyó áram szorzata tehát nem ad valós teljesítményt (7. ábra)! Ez a teljesítmény az úgynevezett meddő teljesítmény: $Q = U_L \cdot I\,[\mathrm{VAr}]$.

Emellett jól megfigyelhető a 8. ábrán, hogy az ellenálláson bármely félperiódus esetén a teljesítményszorzat pozitív értékű, tehát a rezisztív (ohmos) terheléseken mindig valós, más néven hatásos (hővé, fénnyé, mozgási energiává alakuló) a teljesítmény:

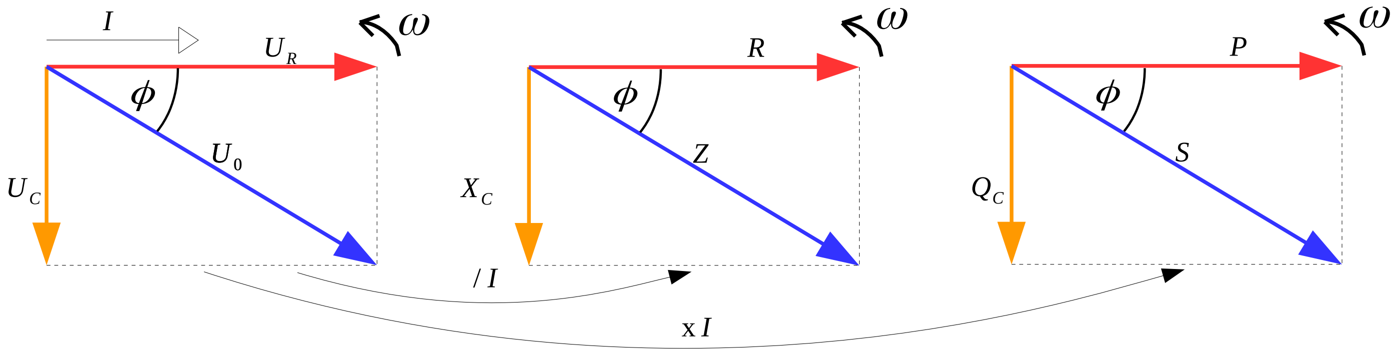
1. félperiódus: $P_{(1)} = U \cdot I = (+) \cdot (+) = (+)$ => felvesz;
2. félperiódus: $P_{(2)} = U \cdot I = (-) \cdot (-) = (+)$ => felvesz.

Amennyiben a feszültség-fázorábra valamennyi komponensét megszorozzuk a soros RL-kör egyetlen közös mennyiségével (vagyis az árammal), akkor a kör teljesítménykomponenseit kapjuk eredményül. Megfigyelhető, hogy az eredményül kapott teljesítmény-fázorábra a feszültség-fázorábrával arányos. Az induktív reaktancia meddő teljesítményének, valamint az ellenállás valós teljesítményének vektoriális összege a hálózatból felvett komplex teljesítmény, vagyis a látszólagos teljesítmény. Mindezek tükrében az is belátható, hogy a komplex teljesítmény (látszólagos teljesítmény, S) koszinuszos vetülete az ellenálláson létrejövő valós, vagyis a hatásos teljesítmény (P), a szinuszos pedig az induktív reaktancia meddő teljesítménye.

$P=U_R\cdot I\ [\mathrm{W}]$; $\quad Q_L=U_L\cdot I\ [\mathrm{VAr}]$; $S=U_0\cdot I\,[\mathrm{VA}]$. $\qquad |U_0|=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$ => $\cdot I$ => $|S|=\sqrt{P^2+Q_L^2}$

$$P=|S|\cdot\cos\phi \text{ és } Q_L=|S|\cdot\sin\phi$$

Összegezzünk minden eddig megismert adatot!



9. ábra A soros RL-kör fázorábrái (*feszültség-*, *impedancia- és teljesítmény-)*

Forrásfeszültség (komplex fesz.): $U_0=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$	Impedancia (komplex ellenállás): $\lvert Z\rvert=\sqrt{R^2+X_L^2}$	A látszólagos teljesítmény (komplex teljesítmény): $\lvert S\rvert=\sqrt{P^2+Q_L^2}$
Az ellenálláson eső feszültség: $U_R=\lvert U_0\rvert\cdot\cos\phi$	Az ellenállás: $R=\lvert Z\rvert\cdot\cos\phi$	A valós teljesítmény: $P=\lvert S\rvert\cdot\cos\phi$
Fázistényező: $\cos\phi=\dfrac{U_R}{\lvert U_0\rvert}$	Fázistényező: $\cos\phi=\dfrac{R}{\lvert Z\rvert}$	Fázistényező: $\cos\phi=\dfrac{P}{\lvert S\rvert}$
A valós feszültség (valamint áram) és a forrásfeszültség által bezárt szög: $\phi=\arccos\dfrac{U_R}{\lvert U_0\rvert}$	A valós ellenállás és az impedancia által bezárt szög: $\phi=\arccos\dfrac{R}{\lvert Z\rvert}$	A valós teljesítmény és a látszólagos teljesítmény által bezárt szög: $\phi=\arccos\dfrac{P}{\lvert S\rvert}$
A kondenzátoron eső feszültség: $U_L=\lvert U_0\rvert\cdot\sin\phi$	Az induktív reaktancia (induktív látszólagos ellenállás, kapacitan-cia): $X_L=\lvert Z\rvert\cdot\sin\phi$	A meddő teljesítmény: $Q_L=\lvert S\rvert\cdot\sin\phi$

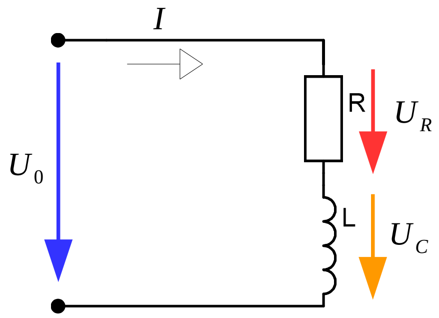
1. táblázat

Nézzünk egy számpéldát!

Állítsunk össze egy soros RL-kört, a következő értékek és adatok mellett!

$R=1\,k\Omega\ ;\ L=10\,H\ ;\ U_0=100\,V\ ;$

$f_1=50\frac{1}{s}=50\,Hz\ ;\ f_2=25\frac{1}{s}=100\,Hz$



10. ábra

Készítsük el a feszültség-, az impedancia-, valamint a teljesítmény fázorábrát két különböző frekvenciájú forrás esetén! Eme feladat kidolgozása során képet kaphatunk arról, hogy állandó feszültség mellett, ámde különböző frekvenciákon hogyan változnak a feszültségek, az ellenállások, a teljesítmények, s vele együtt a fázisszög.

Eredmények 50Hz esetén

A tekercs induktív látszólagos ellenállása:

$$X_{L\,50}=\omega L=2\pi f L=2\pi\cdot 50\frac{1}{s}\cdot 10\,H=2\pi\cdot 50\frac{1}{s}\cdot 10\frac{Vs}{A}=1000\pi\,\Omega=3141{,}59\Omega$$

Az impedancia: $Z_{50}=\sqrt{R^2+X_L{}^2}=\sqrt{1000\,\Omega^2+3141{,}59\,\Omega^2}=3296{,}9\Omega$

Az áramerősség: $|I_{50}|=\frac{U_0}{Z}=\frac{100\,V}{3296{,}9\,\Omega}=30{,}33\,mA$

A tekercsen eső feszültség: $U_{L50}=X_L\cdot I_{50}=3141{,}59\,\Omega\cdot 30{,}33\,mA=95{,}29\,V$

Az ellenálláson eső feszültség: $U_{R50}=R\cdot I_{50}=1000\,\Omega\cdot 30{,}33\,mA=30{,}33\,V$

A forrásfeszültség ellenőrzése: $U_0=\sqrt{U_R{}^2+U_C{}^2}=\sqrt{(95{,}29\,V)^2+(30{,}33\,V)^2}=100\,V$

A tekercs meddő teljesítménye: $Q_{C50}=U_{C50}\cdot I_{50}=95{,}29\,V\cdot 30{,}33\,mA=2{,}89\,VAr$

Az ellenállás hatásos teljesítménye: $P_{50}=U_{R50}\cdot I_{50}=30{,}33\,V\cdot 30{,}33\,mA=0{,}92\,W$

A látszólagos teljesítmény: $|S_{50}|=\sqrt{P^2+Q_C{}^2}=\sqrt{0{,}92\,W^2+2{,}89\,var^2}=3{,}033\,VA$

$|S_{50}|=U_0\cdot I_0=100\,V\cdot 30{,}33\,mA=3{,}033\,VA$

A $\cos\phi$ *(a feszültség-fázorábrából):*

$$\cos\phi_{50}=\frac{U_{R50}}{U_0}=\frac{30{,}33\,V}{100\,V}=\frac{R}{|Z_{50}|}=\frac{1000\,\Omega}{3296{,}9\,\Omega}=\frac{P_{50}}{|S_{50}|}=\frac{0{,}92\,W}{3{,}033\,VA}=0{,}3\,033$$

A ϕ *fázisszög (a feszültség-fázorábrából), 50 Hz esetén, :* $\phi_{50}=\arccos(0{,}3033)=72{,}345^o$

Eredmények 25Hz esetén

A tekercs induktív látszólagos ellenállása:

$$X_{L25} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 25 \frac{1}{s} \cdot 10\,H = 2\pi \cdot 25 \frac{1}{s} \cdot 10 \frac{Vs}{A} = 500\pi\,\Omega = 1570{,}8\,\Omega$$

Az impedancia: $Z_{25} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{1000\,\Omega^2 + 1570{,}8\,\Omega^2} = 1862{,}1\,\Omega$

Az áramerősség: $|I_{25}| = \frac{U_0}{Z_{25}} = \frac{100\,V}{1862{,}1\,\Omega} = 53{,}7\,mA$

A tekercsen eső feszültség: $U_{L25} = X_{L25} \cdot I_{25} = 1570{,}8\,\Omega \cdot 53{,}7\,mA = 84{,}35\,V$

Az ellenálláson eső feszültség: $U_{R25} = R \cdot I_{25} = 1000\,\Omega \cdot 53{,}7\,mA = 53{,}7\,V$

A forrásfeszültség ellenőrzése: $|U_0| = \sqrt{U_{R25}^{\;2} + U_{L25}^{\;2}} = \sqrt{(84{,}35\,V)^2 + (53{,}7\,V)^2} = 100\,V$

A kondenzátor meddő teljesítménye: $Q_{L25} = U_{L25} \cdot I_{25} = 84{,}35\,V \cdot 53{,}7\,mA = 4{,}52\,VAr$

Az ellenállás hatásos teljesítménye: $P_{25} = U_{R25} \cdot I_{25} = 53{,}7\,V \cdot 53{,}7\,mA = 2{,}88\,W$

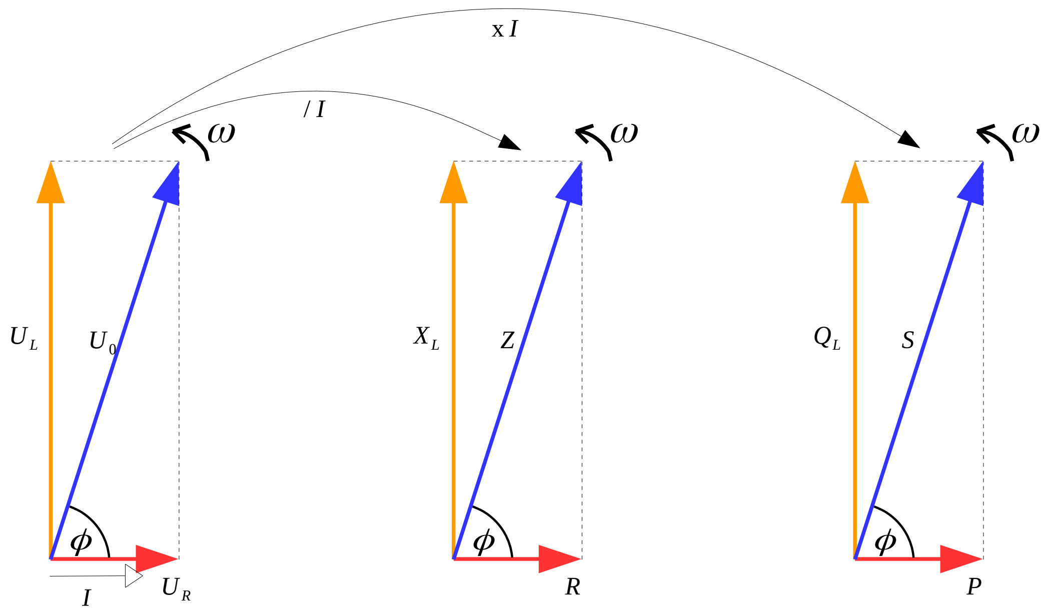
A látszólagos teljesítmény: $|S_{25}| = \sqrt{P_{25}^{\;2} + Q_{L25}^{\;2}} = \sqrt{2{,}88\,W^2 + 4{,}52\,var^2} = 5{,}37\,VA$

$$|S_{25}| = U_0 \cdot I_{25} = 100\,V \cdot 53{,}7\,mA = 5{,}37\,VA$$

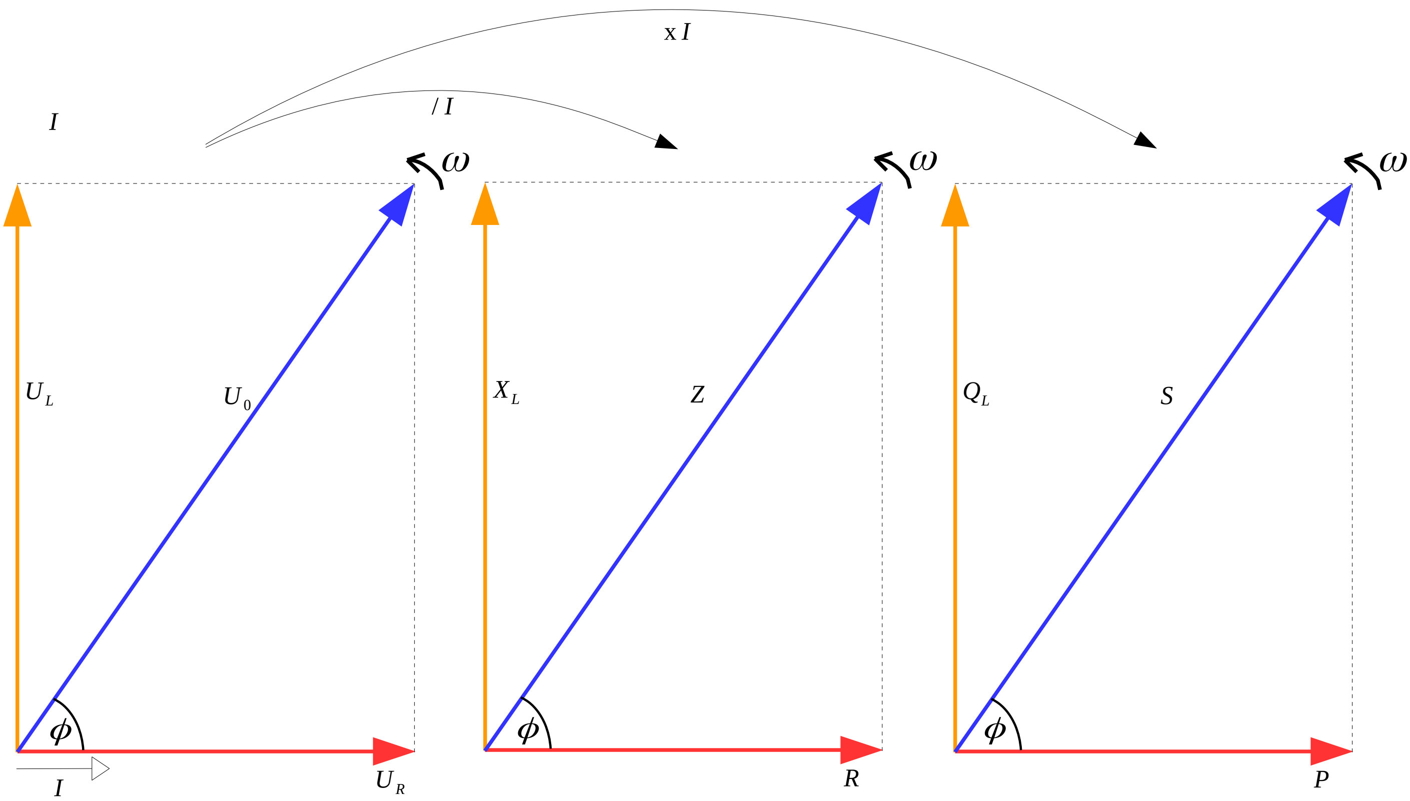
A $\cos\phi$ *, 25 Hz esetén:* $\cos\phi_{25} = \frac{U_{R25}}{U_0} = \frac{53{,}7\,V}{100\,V} = \frac{R}{|Z_{25}|} = \frac{1000\,\Omega}{1862{,}1\,\Omega} = \frac{P_{100}}{|S_{100}|} = \frac{2{,}88\,W}{5{,}37\,VA} = 0{,}537$

A φ *fázisszög (a feszültség-fázorábrából), 25 Hz esetén, :* $\phi_{25} = \arccos(0{,}537) = 57{,}52^o$

2. táblázat	***50 Hz esetén***	***25 Hz esetén***
Az ellenállás, R	$1000\,\Omega$	$1000\,\Omega$
A reaktancia, X_L	$3141{,}59\,\Omega$	$1570{,}8\,\Omega$
Az impedancia, Z	$3296{,}9\,\Omega$	$1862{,}1\,\Omega$
Az ellenállás feszültsége, U_R	$30{,}33\,V$	$53{,}2\,V$
A kondenzátor feszültsége, U_L	$95{,}29\,V$	$84{,}35\,V$
A forrás feszültsége, U_0	$100\,V$	$100\,V$
Az áramerősség, I	$30{,}33\,mA$	$53{,}7\,mA$
A hatásos teljesítmény, P	$0{,}92\,W$	$2{,}88\,W$
A meddő teljesítmény, Q_L	$2{,}89\,VAr$	$4{,}52\,VAr$
A látszólagos teljesítmény, S	$3{,}033\,VA$	$5{,}37\,VA$
A fázistényező, $\cos\phi$	$0{,}3033$	$0{,}537$
A fázisszög, φ	$72{,}54^o$	$57{,}52^o$



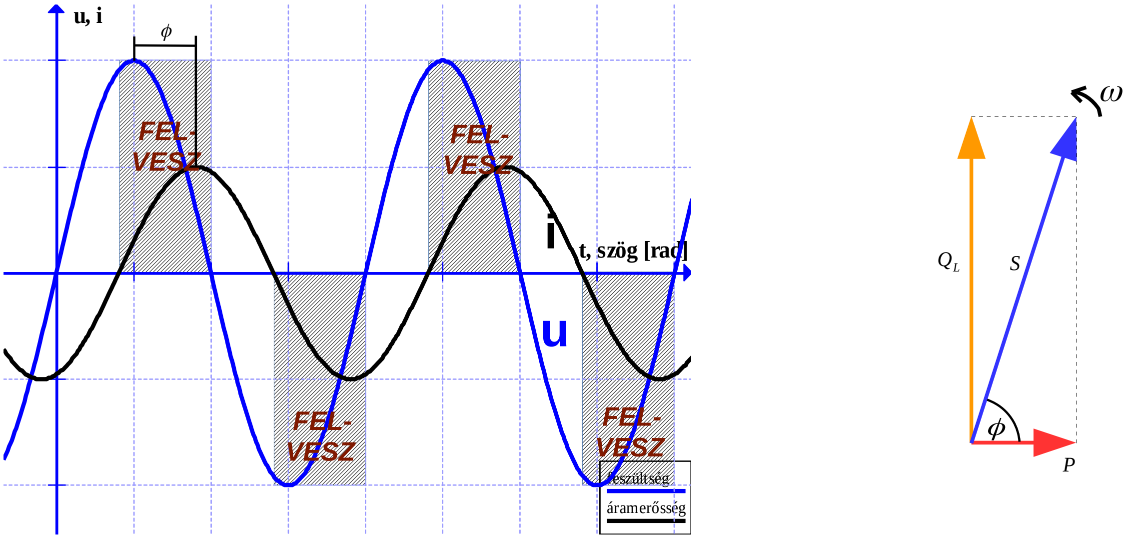
11. ábra A fázorábrák 50 Hz-es frekvenciájú forrás esetén *(feszültség-, impedancia- és teljesítmény-)*



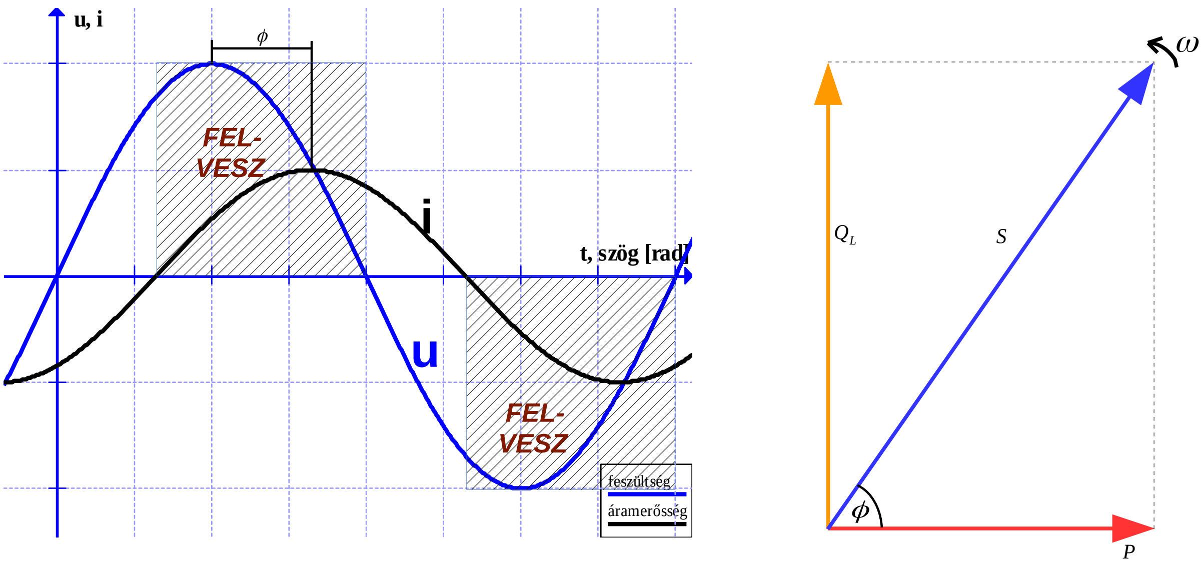
12. ábra A fázorábrák 25 Hz-es frekvenciájú forrás esetén *(feszültség-, impedancia- és teljesítmény-)*

A fázorábrákból megállapítható, hogy csökkenő frekvencia esetén a tekercs reaktanciája csökken, a hatásos teljesítményhez képest arányaiban csökken a meddő teljesítmény, valamint a ϕ szög is. A $\cos\phi$ értéke nő, így az impedancia kevésbé induktív jellegű.

$\downarrow f$ => $\downarrow X_L$ => $\uparrow P$ és $\downarrow Q_L$ és $\downarrow \phi$ => a soros RL-kör impedanciája kevésbé induktív

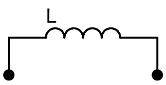
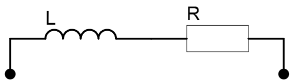
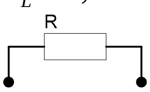


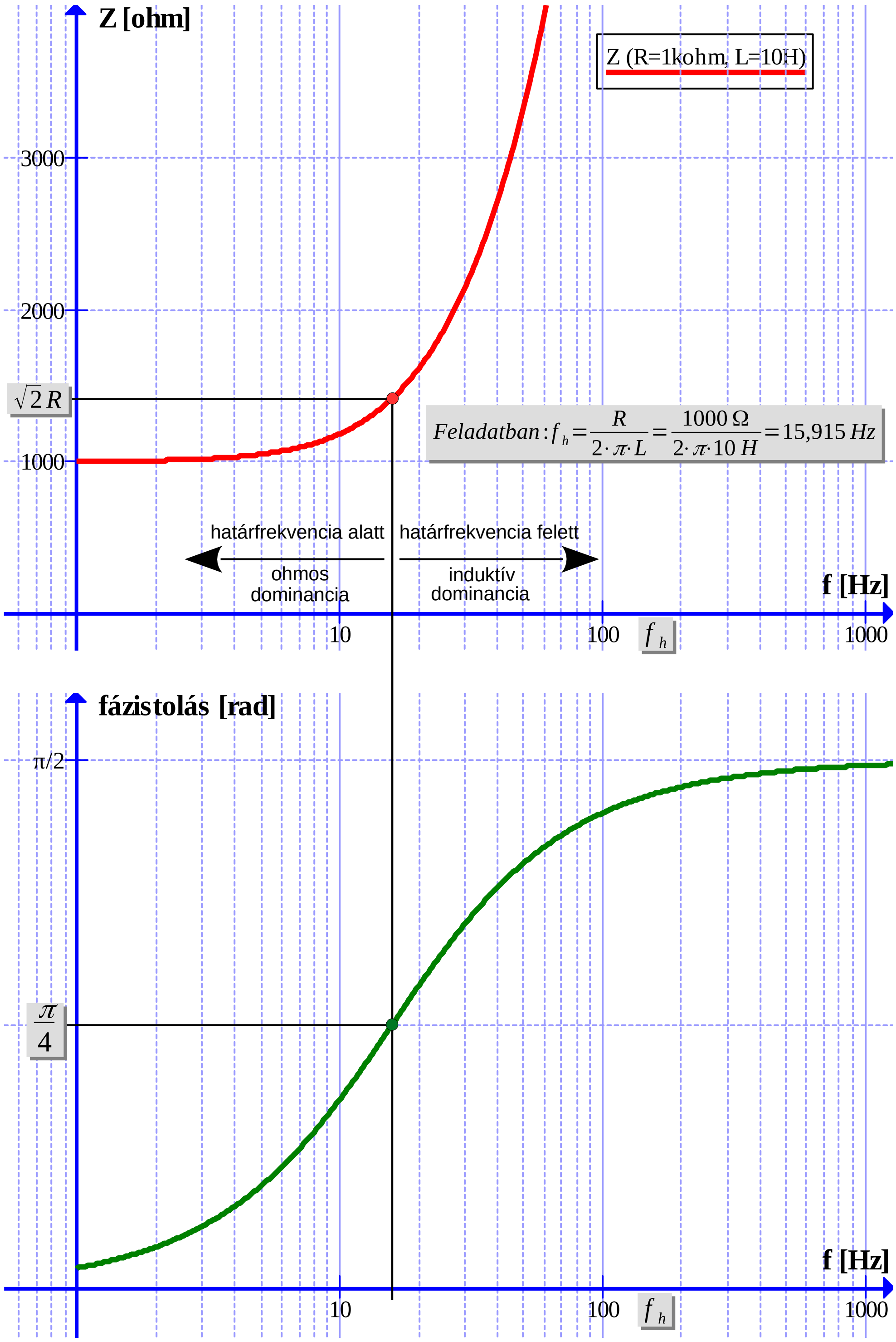
13. ábra A feladatban szereplő soros RL-kör áram- és feszültségviszonya, valamint a teljesítmény-fázorábrája 50 Hz esetén ($U_0=100\,V$, $I=30{,}33\,mA$, $\phi=72{,}54^o$)



14. ábra A feladatban szereplő soros RL-kör áram- és feszültségviszonya, valamint a teljesítmény-fázorábrája 25 Hz esetén ($U_0=100\,V$, $I=53{,}7\,mA$, $\phi=57{,}52^o$)

A 11. és 12. ábra tanúsága szerint, amennyiben csökken a frekvencia, a csökkenő induktív reaktancia miatt a hatásos teljesítmény és a meddő teljesítmény aránya javul, a ϕ szög csökken, a $\cos\phi$ értéke nő. Ennek eredménye az, hogy a soros RL-kör, mint impedancia egyre kevésbé mutat induktív jelleget. A teljes periódusra vonatkoztatott hatásos (felvett) teljesítmény egyre nagyobb.

3. táblázat	Tisztán induktív terhelés 	Induktív jellegű terhelés $(\lvert X_L\rvert>0\,;R>0)$ 	Tisztán ohmos terhelés $(X_L=0\,;R>0)$ 
Fázistényező, $\cos\phi$:	0	$[0\,;1]$	1
Fázisszög, $\lvert\phi\rvert$:	90	$[0\,;90]$	0
Teljesítmény:	$S=\sqrt{P^2+Q_L}$; $P=0$ $\boxed{S=Q_L}$	$\boxed{S=\sqrt{P^2+Q_L}}$	$S=\sqrt{P^2+Q_L}$; $Q_L=0$ $\boxed{S=P}$

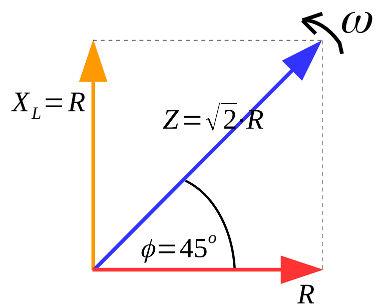


15. ábra A soros RL-kör fázisszögének és impedanciájának frekvenciafüggése

A soros RL-kör impedanciáját a frekvencia-fázisszög, valamint frekvencia-impedancia karakterisztikájával is jellemezhetjük, melyekkel a fázisszög és az impedancia frekvenciafüggéséről kaphatunk képet. Ez fontos lehet az ilyen jellegű impedanciákból kialakított négypólusok viselkedésének vizsgálatakor is.

Létezik egy nevezetes frekvencia, melyet határfrekvenciának nevezünk (f_h). A határfrekvencián az induktív reaktancia nagysága megegyezik az ellenállás értékével:

$$(f_h) \;=>\; |X_L| = R\,.$$



16. ábra Fázorábra a határfrekvencián

A reaktanciák egyezése esetén természetesen a komponensek feszültségeinek, valamint a teljesítményeinek nagysága is megegyező:

$$f_h \;=>\; |U_L| = U_R\,;\quad |Q_L| = P\,.$$

$f_h \;=>\; |X_L| = R$

$\omega L = R$

$2\cdot\pi\cdot f_h L = R$

$$\boxed{f_h = \frac{R}{2\cdot\pi\cdot L}}$$

A fázisszög kiszámítására két mód van:

1. $\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega\cdot L)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}} \;=>\; \phi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right)$

2. $\sin\phi = \frac{X_L}{Z} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\omega\cdot L}{\sqrt{R^2 + (\omega\cdot L)^2}} = \frac{2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{\sqrt{R^2 + (2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}} \;=>\; \phi = \arcsin\left(\frac{X_L}{Z}\right)$

Végezetül tekintsük át, hogy a 15. ábra szerinti f - Z és f - ϕ karakterisztikák függvényeit miként tudjuk megalkotni.

Frekvencia-impedancia karakterisztika

Az impedancia frekvenciafüggősége: $Z=\sqrt{R^2+X_L}$ ebből $Z=\sqrt{R^2+(\omega\cdot L)^2}$

$$Z=\sqrt{R^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}$$

Példánkban $R=1k\Omega$ és $L=1H$, így $Z=\sqrt{(1000\,\Omega)^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot 10\,H)^2}$

Az állandókat írjuk be mértékegység nélkül: $Z=\sqrt{10^6+2^2\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot 10^2}$

A független változó a frekvencia, a függvényérték pedig az impedancia, így az ábrázolandó függvény:

$$y=\sqrt{10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2}$$

Átírva hatványalakba: $\boxed{y=(10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2)^{\frac{1}{2}}}$

A Graph függvényrajzoló program[1] segítségével könnyen ábrázolhatjuk a kapott függvényt:

$y=(10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2)^{\frac{1}{2}}$ → ebből a *Graph* megadás: *y=(10^6+400*pi^2*x^2)^(1/2)*

Frekvencia-fázisszög karakterisztika

A fázisszög frekvenciafüggősége: $\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+X_L{}^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega\cdot L)^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}}$

$$\phi=\arccos\left(\frac{R}{Z}\right) \quad \text{tehát } \phi=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot L)^2}}$$

Példánkban $R=1k\Omega$ és $L=1H$, így $\phi=\arccos\frac{1000\,\Omega}{\sqrt{(1000\,\Omega)^2+(2\cdot\pi\cdot f\cdot 10\,H)^2}}$

Az állandókat írjuk be mértékegység nélkül: $\phi=\arccos\frac{10^3}{\sqrt{10^6+4\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot 10^2}}$

A független változó a frekvencia, a függvényérték pedig a fázisszög, így az ábrázolandó függvény:

$y=\arccos\frac{10^3}{\sqrt{10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2}}$ átírva hatványalakba: $\boxed{y=\frac{10^3}{(10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2)^{\frac{1}{2}}}}$

Az $y=\arccos\frac{10^3}{(10^6+400\cdot\pi^2\cdot x^2)^{\frac{1}{2}}}$ függvényből a *Graph* alak: *y=acos(10^3/((10^6+400*pi^2*x^2)^(1/2)))*

---

1 *Graph függvényrajzoló program: https://www.padowan.dk/download/*